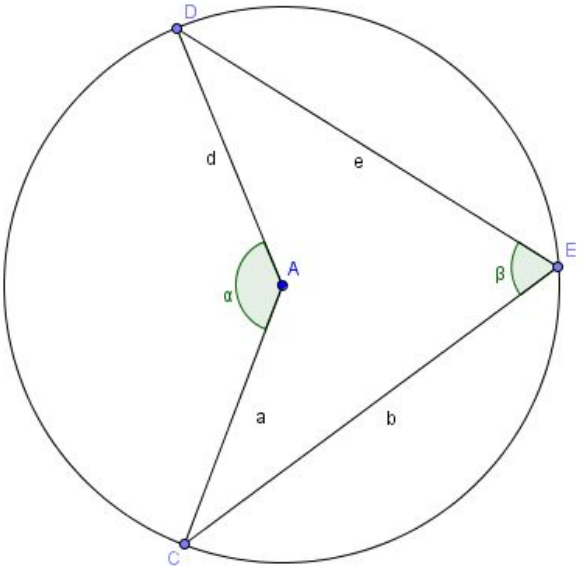
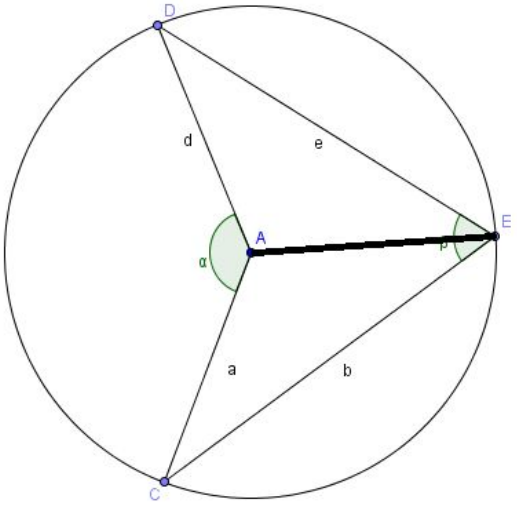
Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica
S01E02

Demonstração do Teorema dos Senos

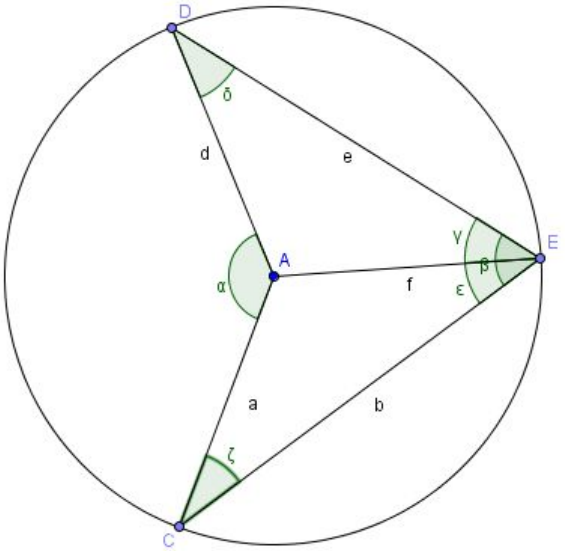
Começaremos introduzindo eles ao teorema do ângulo inscrito na circunferência.



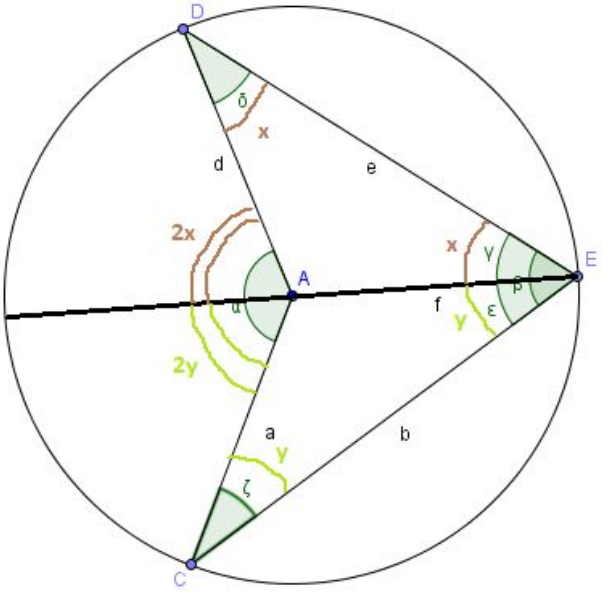
Temos um ângulo central α e o ângulo inscrito a este mesmo arco β. Agora traçamos o raio da circunferência **AE**.



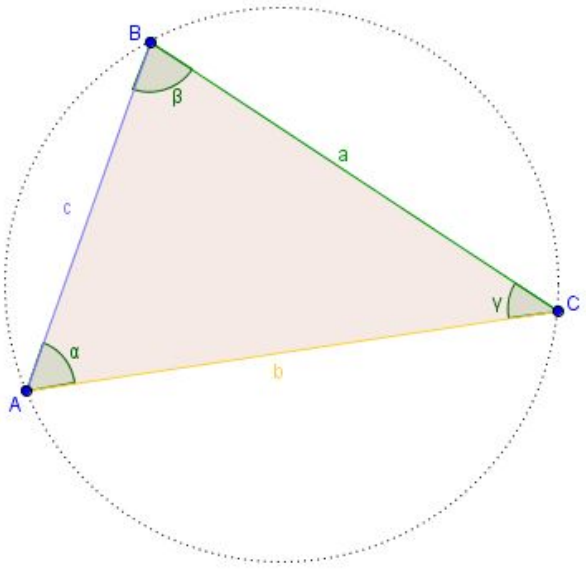
Então, podemos perceber, por **AC** e **AD** serem raio da circunferência também, agora temos dois triângulos isósceles, **ADE** e **ACE**. Então, por serem isósceles, vemos que os ângulos γ e δ do triângulo **ADE** são iguais, portanto, $\gamma = \delta$. E os ângulos ε e ζ do triângulo **ACE** também são iguais, então $\varepsilon = \zeta$.



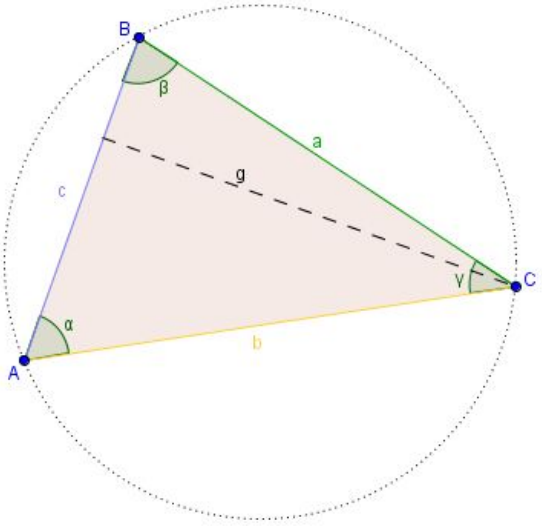
Então denotaremos os ângulos iguais do triângulo **ADE** por **x** e os do **ACE** por **y**, então temos essas relações: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então o ângulo **DÂE** é igual a 180°- x - x=180°- 2x e temos a semirreta **EA**, o diâmetro da circunferência pertence a ela, portanto vemos que o ângulo entre o raio **AD** e o diâmetro da circunferência é igual a 180° menos o ângulo **DÂE**, logo, 180°- (180°- 2x)= 180°- 180°+ 2x= 2x. Analogamente, temos que o ângulo entre o diâmetro e o raio **AC** é 2y. Assim, o ângulo inscrito $\beta = x + y$ e o ângulo central $\alpha = 2x + 2y$, portanto $\alpha = 2\beta$. Como na imagem a seguir:



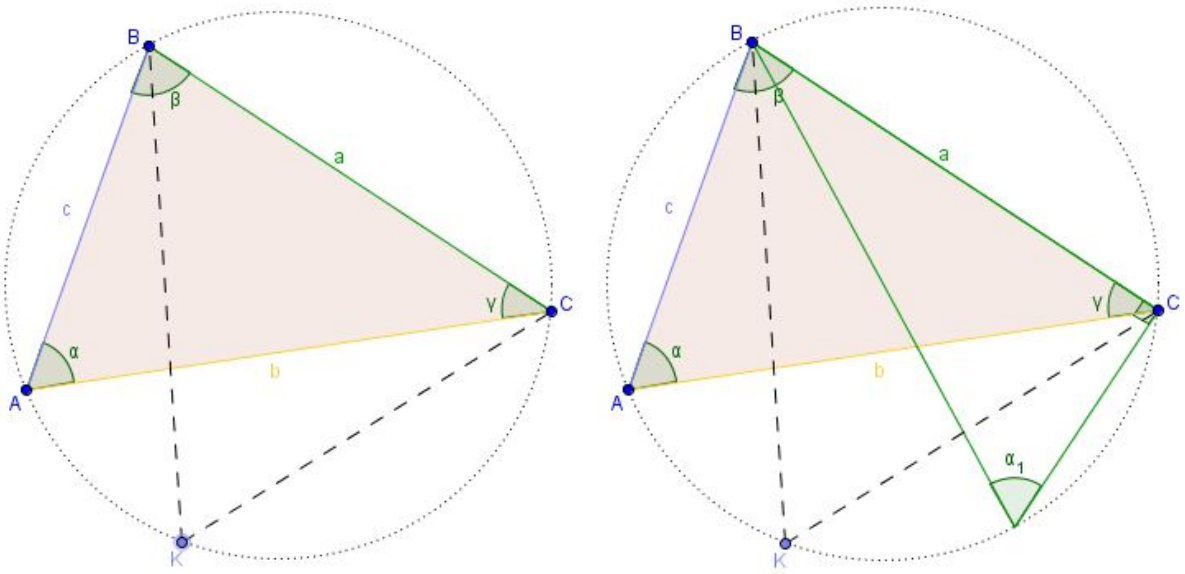
Assim, podemos começar a explicação da lei dos senos. Temos um triângulo qualquer **ABC** e uma circunferência circunscrita a ele.



Então traçamos a altura do triângulo, referente ao vértice **C**, dividindo o triângulo em dois triângulos retângulos, então, em relação ao ângulo α, $sen(\alpha) = \frac{altura}{b}$, logo, $altura = b.sen(\alpha)$ e em relação ao ângulo β, $sen(\beta) = \frac{altura}{a}$, logo, $altura = a.sen(\beta)$, portanto, temos que $a.sen(\beta) = b.sen(\alpha) \Rightarrow \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$. Analogamente, para as relações entre *a* e *c*, e entre *b* e *c*.



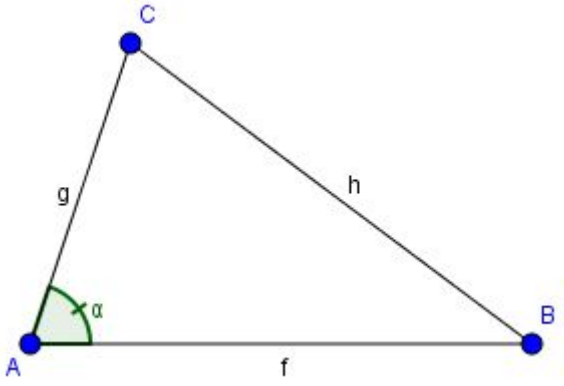
Usando agora o que vimos sobre ângulos inscritos, veremos porque a proporção é válida. Temos que o ângulo inscrito aos vértices B e C é a metade do ângulo central do arco **BC**. Portanto, em qualquer ponto da circunferência que o ponto **K** esteja o ângulo seré o mesmo, no caso, α, portanto se colocarmos **K** de modo que alguma das arestas desse novo triângulo coincida com o diâmetro da circunferência, de acordo com a imagem, temos um triângulo retângulo, e a relação $sen(\alpha) = \frac{a}{diâmetro} \Rightarrow diâmetro = \frac{a}{sen(\alpha)}$. Então, temos que o diâmetro **D** da circunferência vai ser $D = \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$.



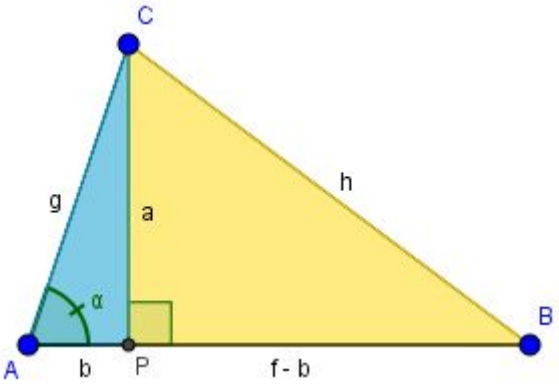
cqd

Demonstração do Teorema dos Cossenos

Começamos construindo um triângulo ABC qualquer. Os segmentos de de reta **AB**, **BC** e **AC** são nomeados **f**, **h** e **g**. O ângulo de A será α.



Agora vamos traçar a altura do triângulo que passa pelo ponto **C** e pelo segmento **f**. A altura **a** nos mostra dois triângulos retângulos, sendo eles **PAC** e **PBC**. Sendo assim obtemos as seguintes relações:



PBC => $g^2 = a^2 + b^2$
PAC => $h^2 = a^2 + (f - b)^2$

Fazendo a subtração da segunda expressão pela primeira obtemos:

$h^2 - g^2 = a^2 + (f - b)^2 - (a^2 + b^2) = (f - b)^2 - b^2$

$h^2 = g^2 + f^2 - 2fb + b^2 - b^2$
$h^2 = g^2 + f^2 - 2fb$

Do triângulo **PAC** temos, pelas relações trigonométricas do triângulo retângulo que foi estudada na aula S01E01:

$$\text{Cos } \alpha = \frac{b}{g} \Rightarrow b = g \cdot \cos \alpha$$

Com isso temos na nossa expressão anterior:

$$\mathbf{h^2 = g^2 + f^2 - 2gf \cdot \cos \alpha}$$

Onde α denota o ângulo no vértice oposto ao lado h.

Analogamente teremos essa relação para os ângulos B (β) e C (γ), ficando com as expressões:

$$g^2 = f^2 + h^2 - 2fh \cdot \cos \beta$$
$$f^2 = g^2 + h^2 - 2gh \cdot \cos \gamma$$

E essa relação em um triângulo qualquer é chamada de **Lei dos Cossenos**.

cqd