Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica
S01E05 - The Big Space Theory
Retas e Plano no Espaço

- Introdução do Conteúdo

No episódio de hoje, trabalharemos com os conceitos de Retas e Plano, no Espaço.

  - O que será abordado?

Veremos os seguintes assuntos:
Introdução à Vetor
Equação de Retas no Espaço
Equação de Planos no Espaço

- Desenvolvimento do Conteúdo

Na penúltima aula, trabalhamos os conceitos de Retas e Plano:
O plano no Espaço é definido por três pontos não colineares, e é definido por três Eixos, sendo eles, x, y e z.
Conforme Euclides definiu em seu livro "Os Elementos"; uma reta é composta por infinitos pontos, e é definida por dois pontos quaisquer no Espaço, sendo eles não coincidentes. Duas retas, ao estarem contidas em um mesmo plano, são chamadas de retas coplanares. As posições relativas entre duas retas coplanares podem ser definidas da seguinte forma:

1. Retas Concorrentes: Retas que contém apenas um ponto em comum. – *Caso específico:* Se o ângulo formado entre elas for 90°, são chamadas de Retas Perpendiculares.
2. Retas Paralelas: Retas que nunca se tocam. – *Caso específico:* Duas retas paralelas podem ser coincidentes (estar uma sobre a outra).
3. Retas Reversas: Retas que nunca se tocam, porém não estão na mesma direção e sentido. – *Caso específico*: Duas retas reversas podem ortogonais (possuir o ângulo de 90° entre elas, mas não se tocam).

Exercício 1: Abram o arquivo GGB 1 e vejam quais posições as retas podem tomar.

Exercício 2: Vamos debater as questões abaixo, utilizando o aplicativo Plickers:

1. **O que é um vetor?**
    a. Uma reta direcionada.
    b. Um segmento de reta com direção.
    c. Um segmento de reta, orientado com sentido.
    d. Uma reta que possui Orientação, Sentido e Direção.
    e. Um objeto, com tamanho, direção e sentido.

2. **Quais os Elementos necessários para construir uma Equação de Reta no Espaço?**
    a. Três pontos não colineares ou dois vetores não paralelos.
    b. Um Vetor e um Ponto no Plano.
    c. Um Vetor e dois Pontos no Plano, ou três pontos não colineares.
    d. Com a orientação de um Vetor e um ponto referencial ou dois vetores não paralelos.
    e. Um Vetor e um Plano.

3. **Quais das alternativas <u>não</u> representa elementos suficientemente necessários para construir a equação de um pano no espaço?**
    a. Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta).
    b. Duas retas reversas.
    c. Um ponto e um segmento de reta que não contém o ponto.
    d. Duas retas concorrentes.
    e. Duas retas paralelas que não se sobrepõem.

Vetor:
Na Geometria Analitica, utilizamos o vetor para construção das Equações (do Plano e da Reta), e para tais construções, devemos abordar os seguintes conceitos:
Venturi define vetor como sendo constituído de uma terna, constituída de Direção, Sentido e um número não-negativo, que seria o seu Tamanho. Ele é empregado em cálculos que necessitam de uma Direção e Sentido. Vetor provém do latim “vehere”, que significa transportar. O significado é pertinente,

pois um vetor AB "transporta" o ponto "A" até o ponto "B". Notação: $\vec{v}$

Um Vetor Normal ao Plano, significa que é perpendicular ao Plano, ou seja, atravessa o plano e não está contido nele.

A Equação do Plano R³

A Equação do Plano é definida por ax + by + cz + d = 0, e construímos ela das seguintes formas:

a) A partir de um Vetor Normal ao Plano e dois Pontos do Plano:
Seja $\vec{v}$ um vetor normal ao plano, e P_0 um ponto pertencente ao plano. Sabemos que o ponto P_x é pertencente ao plano, portanto o vetor $\overrightarrow{P_0P_x}$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}$. Ao realizarmos o produto escalar do vetor $\vec{v}$ por P_x - P_0, temos:

$\vec{v}$. (P_x - P_0) =
(a; b; c) . [(x - p_1); (y - p_2); (z - p_3)] =
a.(x - p_1) + b.(y - p_2) + c.(z - p_3) =
ax - ap_1 + by - bp_2 + cz - cp_3 =
ax + by + cz + (-ap_1 -bp_2 -cp_3) =
ax + by + cz + d = 0, sendo d = (-ap_1 -bp_2 -cp_3)

b) A partir de três Pontos não-colineares:
Sejam a, b e c os pontos pertencentes ao Plano. Dessa forma, temos os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ pertencentes ao Plano. Se fizermos o Produto Vetorial $\vec{AB}$ x $\vec{AC}$, onde encontraremos o vetor $\vec{v}$, normal ao Plano.

Exercício 3: Escreva a equação da reta cuja direção é definida pelo vetor (2, 1, 2) e que passe pelo ponto (-2, 3, 4).

De qualquer forma que a equação seja construída, chegaremos à mesma forma, e tais situações devem ser consideradas:

a) Sendo o Termo Independente for nulo (ax + by + cz = 0), o Plano contém a origem.

b) Sendo o Termo "a" = 0, o Plano é paralelo ao Eixo x. Analogamente, se "b" = 0, o Plano é paralelo ao Eixo y e se "c" = 0, o Plano é paralelo ao Eixo z.

c) Sendo a = d = 0, (by + cz = 0) o Plano contém o Eixo x. Analogamente, se b = d = 0, o Plano contém o Eixo y e se c = d = 0, O Plano contém o Eixo z.

d) Sendo a = b = 0, (cz + d = 0), o Plano é paralelo ao plano xy. Analogamente, se a = c = 0, o Plano é paralelo ao plano xz e se b = c = 0, O Plano é paralelo ao plano yz.

e) Paralelismo entre planos:
Para que dois planos sejam paralelos, os seus vetores diretores devem paralelos entre si também. Ou seja, as variáveis dos vetores devem ser proporcionais.

f) Ortogonalidade entre planos:
Para que dois planos sejam ortogonais, os seus vetores diretores também o devem ser. Ou seja, o produto vetorial deles, deve ser nulo.

g) Planos concorrentes:
É possível determinar a equação de um terceiro plano que contenha a reta de intersecção de dois planos α e β. Para isso, utilizaremos um ponto deste plano (pertencente à reta de interssecção) e a chamada "Equação do Feixe de Planos", determinada por:
$\alpha + \lambda . \beta = 0 \Rightarrow (a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$
Ao substituirmos o ponto P (x, y, z) nas equações, encontramos o valor de λ, e para cada valor de λ, encontramos a equação de um Plano que passa pela reta r.

Exercício 4: Achar a equação do plano que contenha a reta

$$r = \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

e o Ponto P = (1; 3; 0).

A Equação da Reta no R³

Se considerarmos um vetor (que vai determinar uma direção) no espaço, existem infinitas retas paralelas no espaço que têm a mesma direção deste vetor. Porém, se tomarmos um ponto qualquer no espaço, existe apenas uma reta passando por este ponto **e** que tem a mesma direção deste vetor.
Precisamos obter uma equação para a reta r cuja direção é dada pelo vetor $\vec{v}$ = (a, b, c) e que passa pelo ponto M = (w, k, q).
Então um ponto qualquer P = (x, y, z) vai pertencer à reta r se, e somente se, o vetor $\vec{PM}$ for paralelo ao vetor $\vec{v}$.
Ou seja, P pertence a reta r se, e somente se, existe um escalar n tal que $\vec{PM}$ = nv. As coordenadas do vetor $\vec{PM}$ são = (x-w, y-k, z-q), logo, o ponto P

pertence a r se e somente se (x-w, y-k, z-q) = (na, nb, nc), ou seja, se e somente se,

$$r = \begin{cases} x = w + an \\ y = k + bn \\ z = q + cn \end{cases}$$

E essa é a equação paramétrica da reta r, sendo n o parâmetro.

(ok) Exercício 5: Construir as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto G = (3, -2, -5) e tem como vetor diretor w = (7, 1, -3).

Não perca o próximo episódio! Segunda-feira, 26/06, Sala A115. Esperamos vocês!