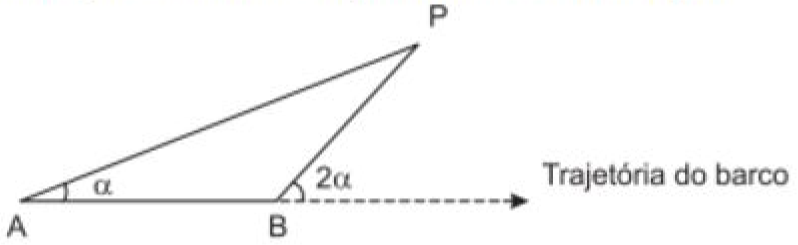
Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica
S01E01 - Pilot
Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo (sen, cos, tg, sec, cotg, cossec)

- **Exercício Introdutório**

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será de quanto?

(Fonte: ENEM 2011 - alterada)

- **Introdução do Conteúdo**

Na primeira aula mostraremos os componentes de um triângulo retângulo (hipotenusa e os dois catetos) e utilizaremos o círculo trigonométrico (de raio 1) para abordar as relações trigonométricas que existem ali.

Começaremos com as três mais conhecidas: seno, cosseno e tangente para melhor visualização dentro do círculo, e depois mostraremos secante, cossecante e cotangente.

  - **O que será abordado?**

Será apresentado como as relações aparecem no triângulo, e o que significam na hora da resolução de exercícios.

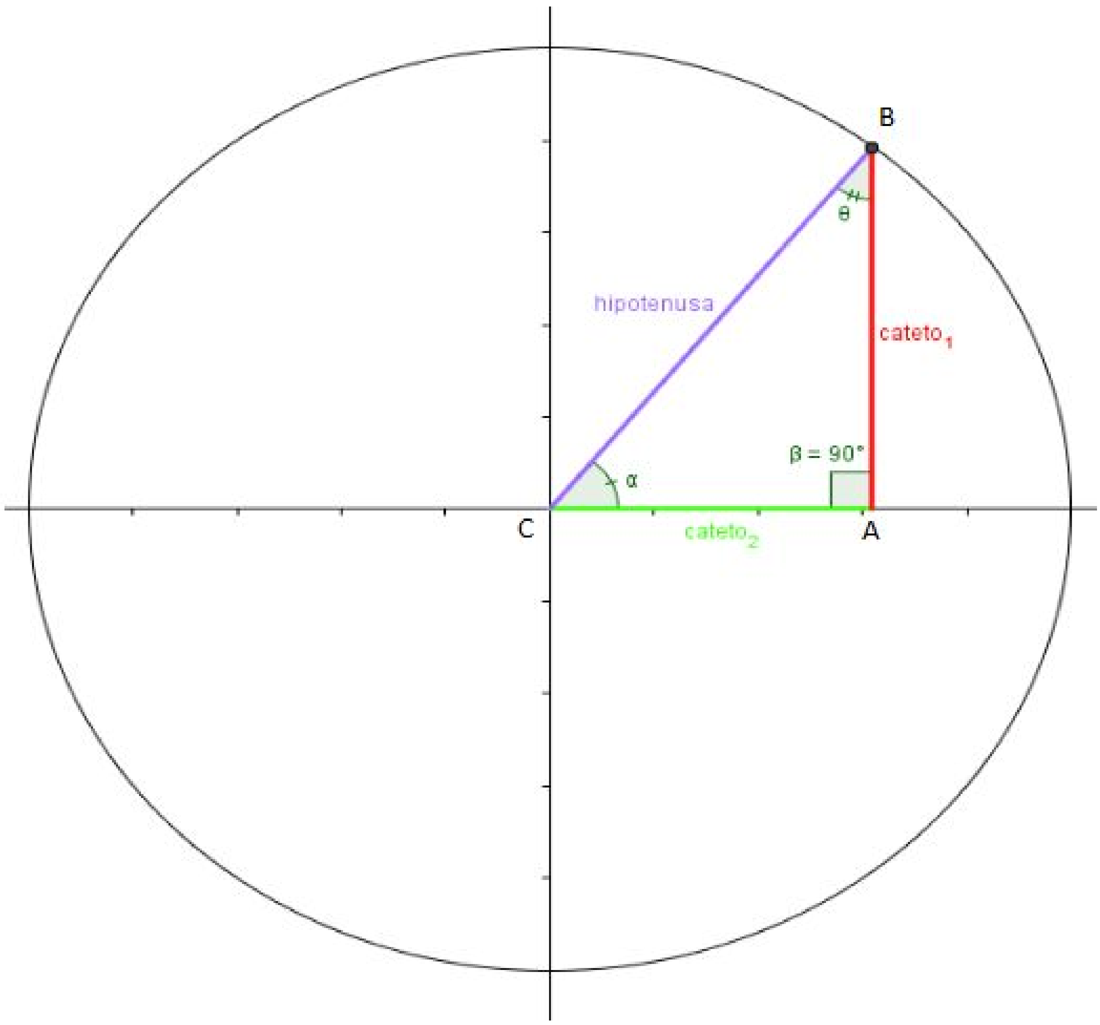
- **Desenvolvimento do Conteúdo**

Começaremos relembrando sobre o círculo trigonométrico:

Define-se como círculo trigonométrico a toda circunferência orientada, de raio unitário e centro no sistema de coordenadas cartesianas. Por convenção, o ponto P(1,0) é a origem da orientação, o sentido positivo é o sentido anti-horário e negativo no sentido horário.

O triângulo será inscrito na circunferência conforme a figura 1, e as Relações Trigonométricas são as projeções dos lados do triângulos, ou no eixo x, ou no eixo y, ou na reta tangente ao círculo, conforme figura 2.

Figura 1



Observando o triângulo ABC, β = 90º, temos:

BC = hipotenusa (oposto ao β)

AC = cateto (adj à α e oposto à θ)

AB = cateto (adj à θ e oposto à α)

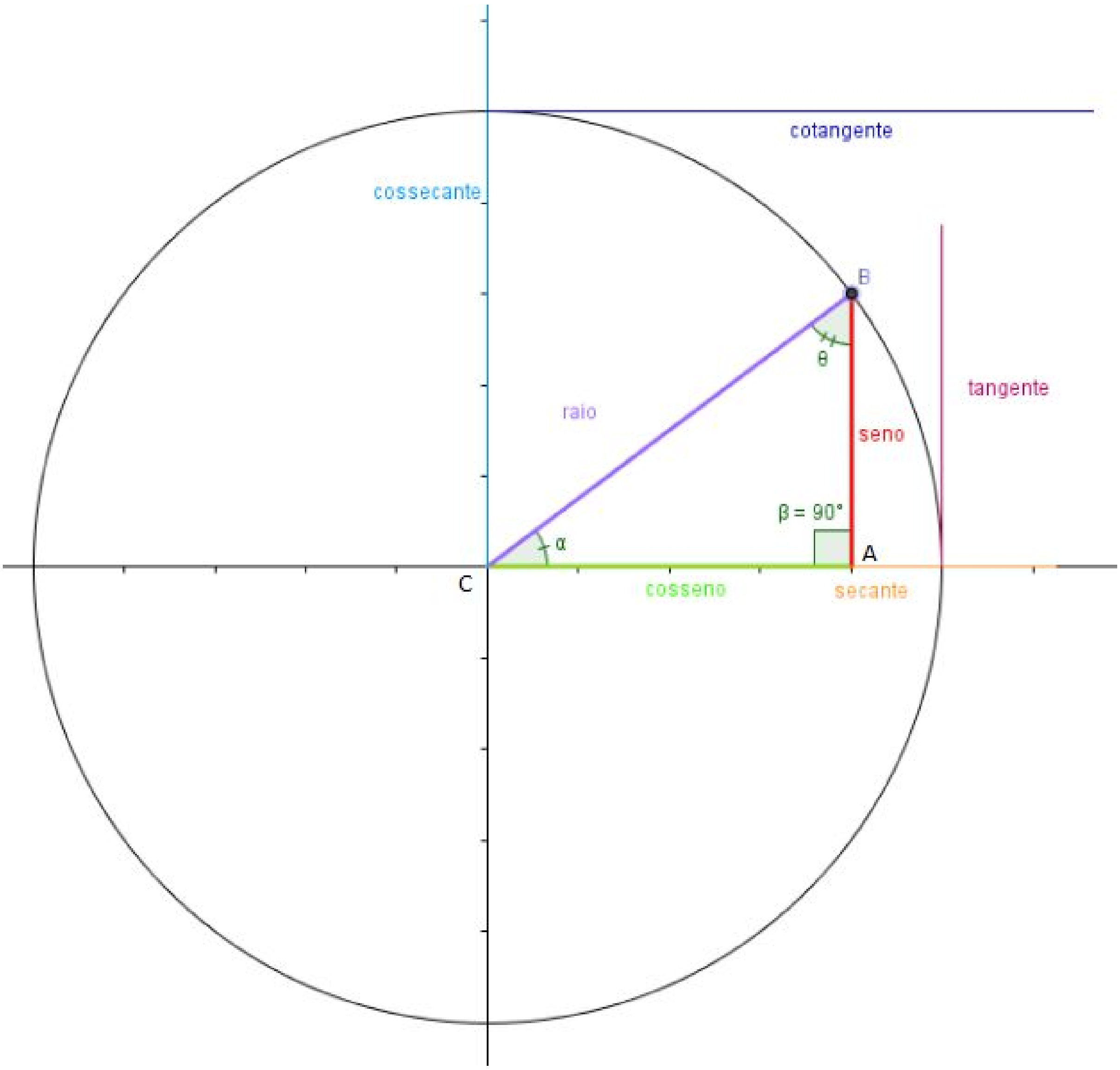
Considerando as informações acima, obtemos:

sen θ = AB $\div$ BC = cat op a θ $\div$ hip
cos θ = AB $\div$ BC = cat adj a θ $\div$ hip
tg θ = AC $\div$ AB = cat op a θ $\div$ cat adj a θ

e

sen α = AB $\div$ BC = cat op a α $\div$ hip
cos α = AC $\div$ BC = cat adj a α $\div$ hip
tg α = AB $\div$ AC = cat op a α $\div$ cat adj a α

Figura 2



Define-se como Seno, a razão do Cateto Oposto ao ângulo α, pela Hipotenusa do triângulo retângulo em questão. Pela Figura acima, podemos notar que o Seno é representado pela medida algébrica do segmento CB (hipotenusa) projetada ortogonalmente no eixo das ordenadas.
Notação: Sen (x)

Define-se como Cosseno, a razão do Cateto Adjacente ao ângulo α, pela Hipotenusa do triângulo retângulo em questão. Pela Figura acima, podemos notar que o Cosseno é representado pela medida algébrica do segmento CB (hipotenusa) projetada ortogonalmente no eixo das abcissas.
Notação: Cos (x)

Define-se como Tangente, a razão do Cateto Oposto ao ângulo α, pelo Cateto Adjacente ao ângulo α. Pela Figura acima, podemos notar que as Tangente é representada pelo prolongamento da Hipotenusa do triângulo, até a reta suporte que tangencia o círculo trigonométrico, no eixo das abcissas.
Notação: Tg (x)

Define-se como Secante, a função inversamente proporcional à função Cosseno. No círculo trigonométrico, a Secante é representada pela intersecção do segmento perpendicular à hipotenusa do triângulo retângulo em questão, com o eixo das abcissas.
Notação: Sec (x)

Define-se como Cossecante, a função inversamente proporcional à função Seno. No círculo trigonométrico, a Cossecante é representada pela a intersecção do segmento perpendicular à hipotenusa do triângulo retângulo em questão, com o eixo das ordenadas.
Notação: Csc (x)

Define-se como Cotangente, a função inversamente proporcional à função Tangente. No círculo trigonométrico, a Cotangente é representada pela a intersecção do prolongamento da hipotenusa do triângulo retângulo em questão, com a reta suporte que tangencia o círculo trigonométrico, no eixo das ordenadas.
Notação: Ctg (x)

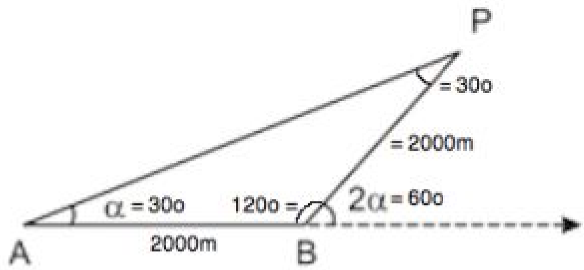
➔ Resolução e Explicação do Exercício Introdutório
(por parte dos professores)

Como primeiro dado, temos que o ângulo α é 30º, e já podemos calcular o ângulo 2α, que será 60° (2 x 30°). Você já sabe que uma das propriedades de um triângulo é que a soma de seus ângulos internos será sempre 180°. Mas temos aqui apenas um ângulo interno e um ângulo externo, como saber os outros ângulos?

Veja, o ângulo externo 2α mede 60°. Para saber o ângulo interno, basta subtrair 60° de 180°, que é a medida de um ângulo reto. Logo, 180° – 60° = 120°. Está aí, um dos ângulos internos faltantes é 120°.

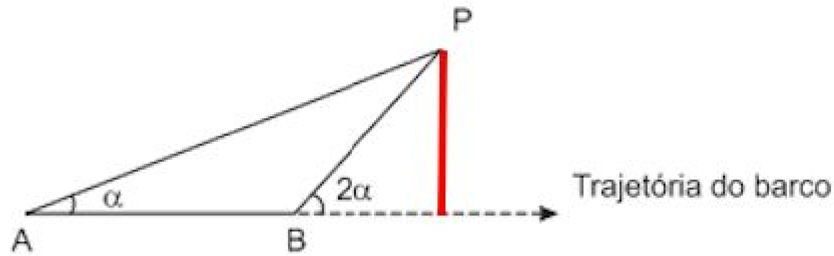
Agora, basta somar esse ângulo com o outro já conhecido, para determinar o valor do último ângulo restante. Já que a soma dos ângulos é sempre 180°, então 180° - (120° + 30°) = 30°. Agora temos todos os ângulos do triângulo, você consegue adivinhar que tipo de triângulo ele forma?

Um triângulo que possui dois ângulos internos com o mesmo valor só pode ser isósceles, logo, os dois lados que formam o ângulo maior possuem a mesma medida. O triângulo ficará com as seguintes medidas:

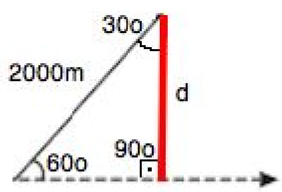


O barco seguirá na mesma trajetória, em linha reta, até que atinja a menor distância entre a praia e sua localização. Qual será a menor distância?

É simples, a menor distância entre um ponto e uma reta paralela a esse ponto é sempre uma reta perpendicular! Abaixo, a linha vermelha representa essa reta.



Pronto, se retirarmos o primeiro triângulo, ficaremos com um triângulo retângulo. Já sabemos que um de seus ângulos agudos é 60° (2). Agora, somamos o ângulo agudo de 60° com o ângulo reto de 90° e subtraímos 180. Chegaremos ao valor do outro ângulo agudo, de 30°. Sabemos também que a hipotenusa mede 2000m. Vamos chamar a linha vermelha de ***d***, é esse valor que queremos descobrir.



Para saber a distância d, podemos utilizar o cosseno de 30°, que é a divisão do cateto adjacente desse ângulo pela hipotenusa.

cos 30°: $\sqrt{3}/2$

cateto adjacente: d

hipotenusa: 2000 m

Na fórmula:

$\sqrt{3}/2 = d/2000$

Aplicando a multiplicação distributiva, teremos: $2d = 2000\sqrt{3}$

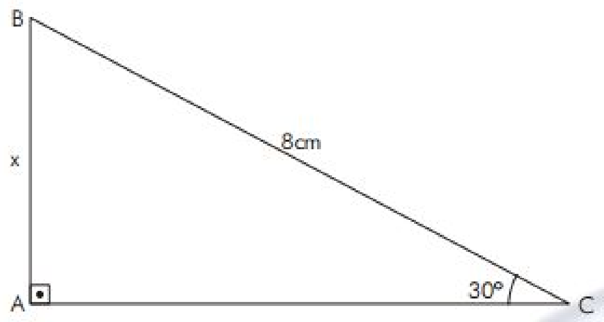
Agora, dividindo toda a equação por 2, temos: $d = 2000\sqrt{3} / 2$

$d = 1000\sqrt{3}$

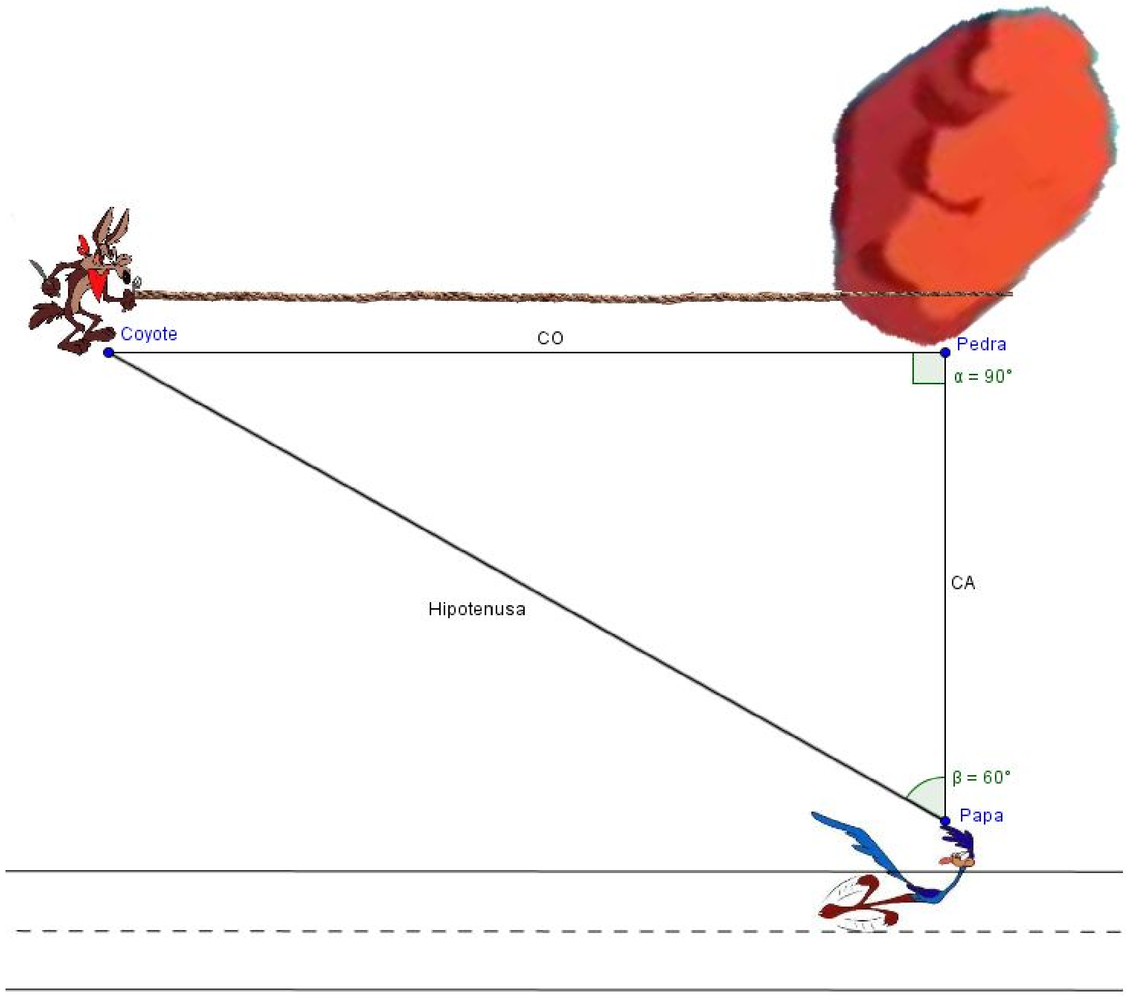
Portanto, a menor distância será $1000\sqrt{3}$.

- Apresentação de 5 exercícios para resolução (por parte dos alunos)

1. Na figura abaixo, o valor da medida indicada por “x” é:



2. O Coyote armou mais uma armadilha para o Papa Léguas, conforme figura a seguir. Calcule a altura que a pedra cairá quando o Coyote soltá-la, sabendo que a distância entre o Coyote e o Papa Léguas (hipotenusa do triângulo) é 25m.

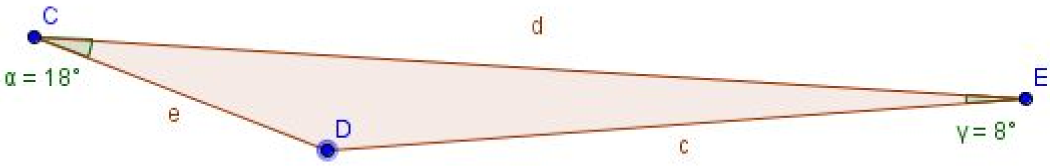


Imagens: Google

3. (U.F. Juiz de Fora – MG) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um navio avistou uma montanha e decidiu medir a sua altura. Ele mediu um ângulo de 30° na direção do seu cume. Depois de navegar mais 2 km em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo um novo ângulo de 45°. Então, usando √3 = 1,73, qual o valor que mais se aproxima da altura dessa montanha, em quilômetros?

4. (UFPA) Num triângulo retângulo ABC tem-se A 90 ˆ = , AB=45 e BC=6. Pede-se a tangente do ângulo B.

5. No triângulo a seguir, o que você pode afirmar sobre a medida do ângulo interno no vértice D?



Na quarta-feira, às 19h, as respostas explicadas dos exercícios propostos estarão divulgados em nossa página, na aba desta aula, bem como serão disponibilizados exercícios extras, na aba Bônus, para melhor compreensão do assunto. Lembrando que estamos sempre a disposição via contato da página.