

Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica

Aula S01E06 – Distância no plano e no espaço

❖ Resolução da atividade “Distance Wars”:

1. Qual a distância entre as estrelas Anã e Supergigante?

Estrelas são esferas, logo o centro delas será os pontos referenciais. Ponto central da Anã é $(0; 0; 0)$ e da Supergigante $(32; 22; 22)$ e após subtraímos os raios das esferas, 1 e 3, respectivamente. Calculando pelo método de encontrar a distância entre dois pontos, temos que:

$$d = \sqrt{(32 - 0)^2 + (22 - 0)^2 + (22 - 0)^2} = \sqrt{32^2 + 22^2 + 22^2} = \sqrt{1992} = 44,63 - 1 - 3 = 40,63 \text{ u.m.}$$

2. Qual a distância entre o buraco negro e planeta Naboo?

O buraco negro é representado por um plano cuja equação do plano é $-x - y - z = 9$ e o planeta Naboo é o ponto de coordenadas $(-3; 4; 4)$. Calculando pelo método de encontrar a distância entre um ponto e um plano, temos que:

$$d = \frac{|(-1)(-3) + (-1)(4) + (-1)(4) - 9|}{|\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}|} = \frac{|3 - 4 - 4 - 9|}{|\sqrt{1 + 1 + 1}|} = \frac{|-14|}{|\sqrt{3}|} = \frac{14}{\sqrt{3}} = 8,08 \text{ u.m.}$$

3. Qual a distância entre a estrela Supergigante e Jakku?

A estrela Supergigante tem o centro de coordenadas $(32; 22; 22)$ e raio 3. Planeta Jakku é o ponto de coordenadas $(8; 19; -2)$. Calculando pelo método de encontrar a distância entre dois pontos, temos que:

$$d = \sqrt{(32 - 8)^2 + (22 - 19)^2 + (22 - (-2))^2} = \sqrt{24^2 + 3^2 + 24^2} = \sqrt{1661} = 34,07 - 3 = 31,07 \text{ u.m.}$$

4. Qual a distância entre os planetas Tatooine e Naboo?

O planeta Tatooine é o ponto de coordenadas $(-5; 5; -5)$ e o planeta Naboo é o ponto de coordenadas $(-3; 4; 4)$. Calculando pelo método de encontrar a distância entre dois pontos, temos que:

$$d = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (5 - 4)^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-9)^2} = \sqrt{86} = 9,27 \text{ u.m.}$$

5. Qual a distância entre a estrela Supernova e o planeta Naboo?

A estrela Supernova tem o centro de coordenadas $(-10; 5; -11)$ e raio 2. Planeta Naboo é o ponto de coordenadas $(-3; 4; 4)$. Calculando pelo método de encontrar a distância entre dois pontos, temos que:

$$d = \sqrt{(-10 + 3)^2 + (5 - 4)^2 + (-11 - 4)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 1^2 + (-15)^2} = \sqrt{275} = 16,58 - 2 = 14,58 \text{ u.m.}$$

6. Encontre a menor distância entre a trajetória da nave Millennium Falcon até o planeta Jakku e a estrela Anã.

A trajetória da nave é representada pela reta cuja equação é dada por $(8; 19; -2) + \lambda(0,92; -8,17; -1,5)$ formada por um ponto e um vetor e a estrela Anã é a esfera cuja equação é dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, a partir desta equação, podemos constatar que o centro da esfera é o ponto de coordenadas $(0; 0; 0)$ e ela possui raio 1. Utilizaremos o centro da esfera para calcular pelo método de encontrar a distância entre um ponto e uma reta e depois subtraímos o raio da esfera, então temos que:

$$d' = \frac{|(0,92; -8,17; -1,5) \times (-8; -19; 2)|}{|\sqrt{(0,92)^2 + (-8,17)^2 + (-1,5)^2}|} = \frac{M}{|8,35|} = \frac{94,74}{8,35} = 11,34$$

Sendo M é a norma do produto vetorial entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0,92 & -8,17 & -1,5 \\ -8 & -19 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ 0,92 & -8,17 \\ -8 & -19 \end{vmatrix}$$

Então subtraímos do resultado o raio da esfera, logo, temos que:

$$d = 11,34 - 1 = 10,34 \text{ u.m.}$$

7. Encontre a menor distância entre a trajetória da nave Millennium Falcon até o planeta Tatooine e a estrela Supergigante.

A trajetória da nave é representada pela reta cuja equação é dada por $(8,92; 10,83; -3,5) + \lambda(-13,92; -5,83; -1,5)$ formada por um ponto e um vetor e a estrela Supergigante é a esfera cuja equação é dada por $(x - 32)^2 + (y - 22)^2 + (z - 22)^2 = 9$, a partir desta equação, podemos constatar que o centro da esfera é o ponto de coordenadas $(32; 22; 22)$ e ela possui raio 3. Utilizaremos o centro da esfera para calcular pelo método de encontrar a distância entre um ponto e uma reta e depois subtraímos o raio da esfera, então temos que:

$$d' = \frac{|(-13,92; -5,83; -1,5) \times (23,08; 11,17; 25,5)|}{|\sqrt{(-13,92)^2 + (-5,83)^2 + (-1,5)^2}|} = \frac{M}{|15,17|} = \frac{347,06}{15,17} = 22,89$$

Sendo M é a norma do produto vetorial entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -13,92 & -5,83 & -1,5 \\ 23,08 & 11,17 & 25,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ -13,92 & -5,83 \\ 23,08 & 11,17 \end{vmatrix}$$

Então subtraímos do resultado o raio da esfera, logo, temos que:

$$d = 22,89 - 3 = 19,89 \text{ u.m.}$$

8. Encontre a menor distância entre a trajetória da nave Millennium Falcon até o planeta Naboo e a estrela Supernova.

A trajetória da nave é representada pela reta cuja equação é dada por $(-3; 4; 4) + \lambda(11,92; 6,83; -7,5)$ formada por um ponto e um vetor e a estrela Supernova é a esfera cuja equação é dada por $(x + 10)^2 + (y - 5)^2 + (z + 11)^2 = 4$, a partir desta

equação, podemos constatar que o centro da esfera é o ponto de coordenadas $(-10; 5; -11)$ e ela possui raio 2. Utilizaremos o centro da esfera para calcular pelo método de encontrar a distância entre um ponto e uma reta e depois subtraímos o raio da esfera, então temos que:

$$d' = \frac{|(11,92; 6,83; -7,5) \times (7; 1; -15)|}{|\sqrt{(-11,92)^2 + (6,83)^2 + (-7,5)^2}|} = \frac{M}{|15,65|} = \frac{257,07}{15,65} = 16,42$$

Sendo M é a norma do produto vetorial entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 11,92 & 6,83 & -7,5 \\ 7 & 1 & -15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ 11,92 & 6,83 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Então subtraímos do resultado o raio da esfera, logo, temos que:

$$d = 16,42 - 2 = 14,42 \text{ u. m.}$$