

Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica S01E02

Demonstração do Seno e Cosseno da soma e diferença de arcos

➤ Demonstração do Seno e Cosseno da **soma** de arcos:

Partindo de um triângulo retângulo **EFG** com a hipotenusa de tamanho 1, inscrito num retângulo **HIJE** como podemos ver na Figura 1.

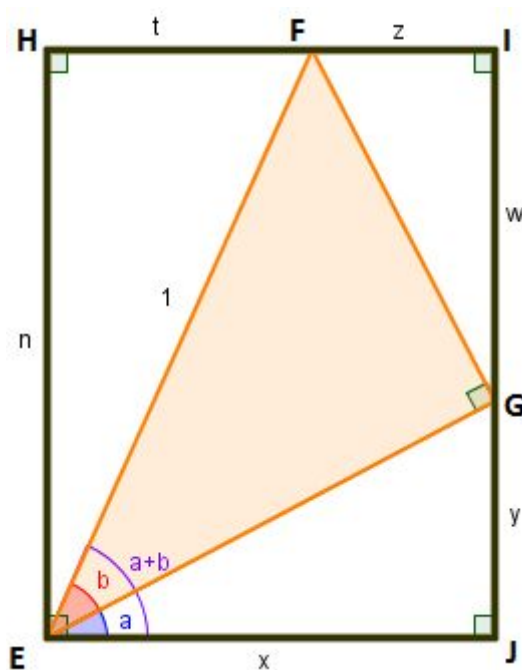


Figura 1

Nomeamos alguns segmentos para uma melhor leitura, como vemos na Figura 1, temos os lados do retângulo $EH=n$, e $EJ=x$. Nos outros dois lados desse retângulo, temos $HF=t$, $FI=z$, $IG=w$ e $GJ=y$, logo $z+t=x$ e $w+y=n$ (por $EHIJ$ ser um retângulo).

O ângulo que chamamos de **b** é o ângulo interno do triângulo no vértice E, o ângulo **a** será do segmento EG até o lado x, então, a soma desses dois ângulos será **a+b** destacado em roxo como podemos ver na Figura 1.

Com as relações Trigonométricas que vimos na aula S01E01, conseguimos calcular os catetos desse triângulo EFG.

$$\rightarrow \sin(b) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{EG}{1} = EG$$

$$\rightarrow \cos(b) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{FG}{1} = FG$$

Agora podemos completar a nossa imagem.

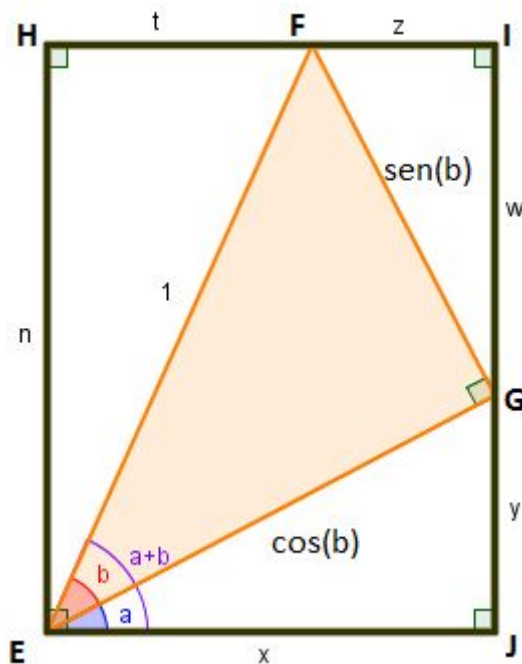


Figura 2

No triângulo **EGJ** de hipotenusa $\cos(b)$ e ângulo interno **a**, queremos saber o valor de **x** e de **y**.

$$\rightarrow \cos(a) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{\cos(b)} \rightarrow \mathbf{x = \cos(a) \cdot \cos(b)}$$

$$\rightarrow \sin(a) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{\cos(b)} \rightarrow \mathbf{y = \sin(a) \cdot \cos(b)}$$

Para descobrir o outro ângulo que falta do triângulo **EGJ**, que vamos chamar de **a'**, teremos que pensar que como temos dois ângulos, **a** e **90°**, e sabendo que a soma dos ângulos interno de qualquer triângulo é 180°. Logo teremos que:

$$a + 90^\circ + a' = 180^\circ \rightarrow a' = 180^\circ - 90^\circ - a = 90^\circ - a \rightarrow \mathbf{a' = 90^\circ - a}$$

Com esse resultado, podemos saber o ângulo que forma entre segmento **w** até **FG** que vamos chamar de **w'**. Repare que esse ângulo está no lado do retângulo EHJI, logo temos que:

$$a' + 90^\circ + w' = 180^\circ \rightarrow (90^\circ - a) + 90^\circ + w' = 180^\circ \rightarrow 180^\circ - a + w' = 180^\circ \rightarrow -a = w' \rightarrow \mathbf{w' = a}$$

II

Com esses resultados chegamos na Figura 3, como vemos abaixo:

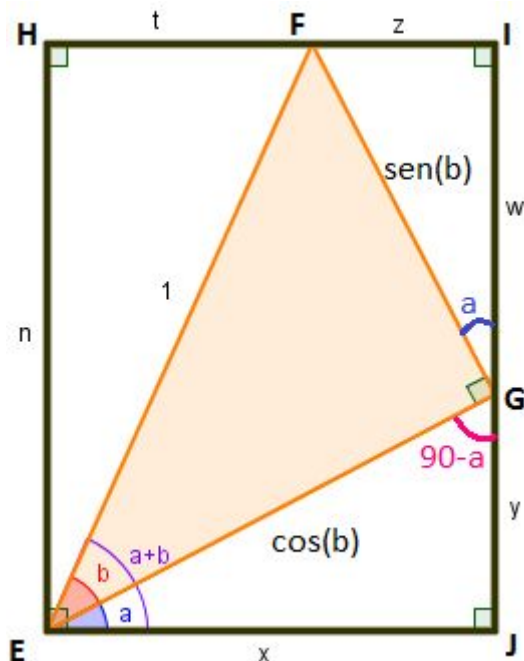


Figura 3

Agora olhando para o triângulo **FIG**, e usando as relações Trigonométricas para Seno e Cosseno:

$$\rightarrow \cos(a) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{w}{\text{sen}(b)} \rightarrow \mathbf{w = \cos(a) \cdot \text{sen}(b)}$$

$$\rightarrow \text{sen}(a) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{z}{\text{sen}(b)} \rightarrow \mathbf{z = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}$$

Para saber os lados do triângulo **EHF**, temos que primeiro calcular os seus ângulos internos. Então, vamos perceber que no vértice E temos um ângulo reto, ou seja 90° , e o ângulo entre o lado do triângulo FE e o lado n vamos nomear de n' , logo podemos ver que:

$$\rightarrow (a+b) + n' = 90^\circ \rightarrow \mathbf{n' = 90^\circ - (a+b)}$$

Então já temos dois ângulos internos do triângulo **EHF**. Para saber o terceiro ângulo, vamos lembrar que a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é 180° . E esse ângulo que forma entre o segmento **EF** e o lado **t** chamaremos de t' . Logo:

$$\rightarrow n' + 90^\circ + t' = 180^\circ \rightarrow 90^\circ - (a+b) + 90^\circ + t' = 180^\circ \rightarrow 180^\circ + t' = (a+b) + 180^\circ \rightarrow \mathbf{t' = (a+b)}$$

Conforme a Figura 4:

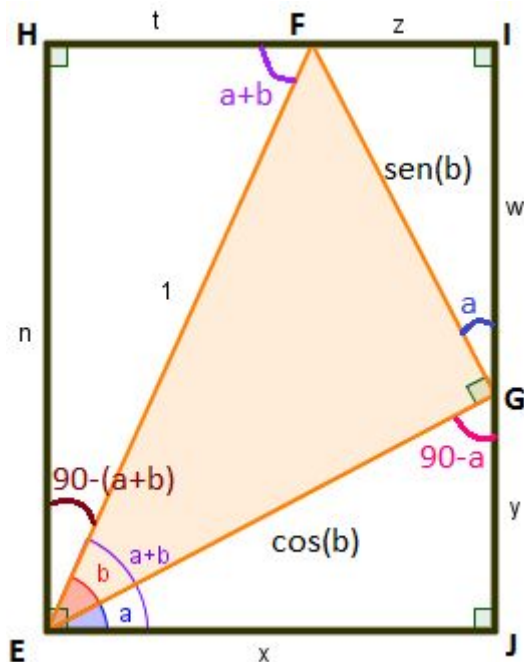


Figura 4

Então agora tendo esse ângulo, vamos calcular os lados **n** e **t**:

$$\rightarrow \cos(a+b) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{t}{1} = t \rightarrow \mathbf{t = \cos(a+b)}$$

$$\rightarrow \sin(a+b) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{n}{1} = n \rightarrow \mathbf{n = \sin(a+b)}$$

Agora, sabemos todos os lados da nossa figura. Então relembando os valores desses lados:

$$\mathbf{x = \cos(a) \cdot \cos(b); y = \sin(a) \cdot \cos(b); w = \cos(a) \cdot \sin(b); z = \sin(a) \cdot \sin(b);}$$

$$\mathbf{t = \cos(a+b); n = \sin(a+b);}$$

E por termos **EHIJ** um retângulo, temos que os lados opostos são congruentes, e então **z+t=x** e **n=w+y**. Logo,

$$z+t=x \rightarrow \sin(a) \cdot \sin(b) + \cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \rightarrow$$

$$\mathbf{\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)}$$

$$n=w+y \rightarrow \mathbf{\sin(a+b) = \cos(a) \cdot \sin(b) + \sin(a) \cdot \cos(b)}$$

cqd

➤ Demonstração do Seno e Cosseno da **diferença** de arcos:

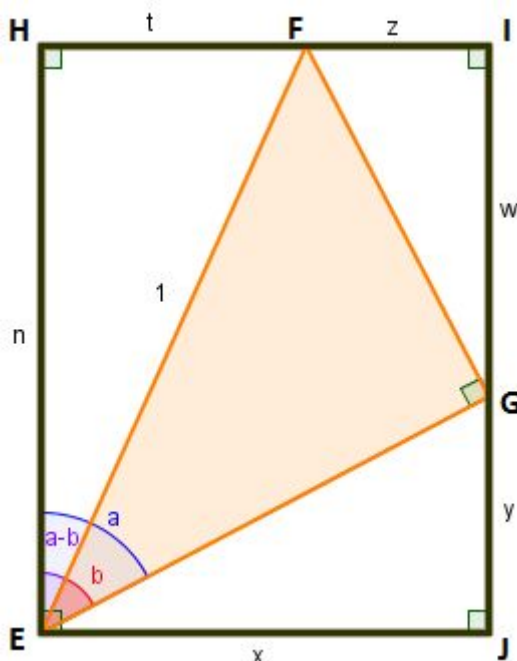


Figura 5

Continuando com a mesma figura, e com os mesmos nomes para os lados e segmentos.

Notando uma modificação, agora o ângulo que chamamos de **b** é o ângulo interno do triângulo no vértice E, o ângulo **a** será do segmento EG até o lado n, então, a diferença desses dois ângulos será **a-b** destacado em roxo como podemos ver na Figura 5.

Seguindo os mesmos raciocínios da demonstração anterior, analisando os 3 triângulos internos no retângulo **EHIJ** que estão envolta do triângulo central **EFG**. E usando para os cálculos dos valores dos lados as relações de seno e cosseno, é como vamos dar continuidade para essa demonstração.

Então, para calcular os catetos desse triângulo EFG. Temos que:

$$\rightarrow \sin(b) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{EG}{1} = EG$$

$$\rightarrow \cos(b) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{FG}{1} = FG$$

II

Agora podemos completar a nossa imagem.

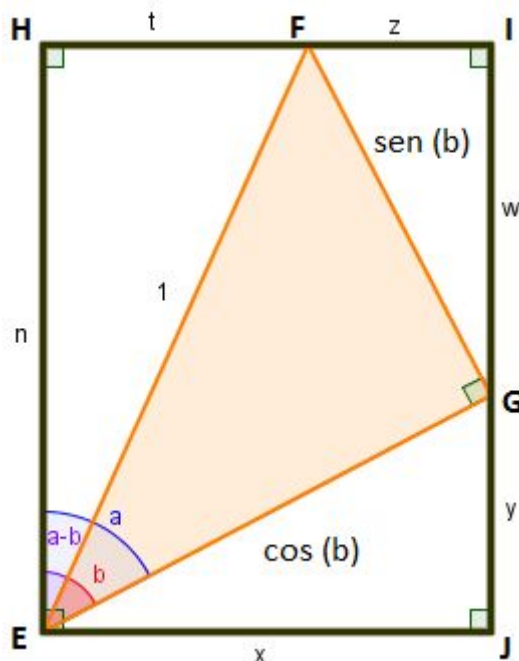


Figura 6

Podemos demonstrar analogamente à demonstração anterior, da soma de arcos.

No triângulo **EGJ** de hipotenusa $\cos(b)$ e ângulo interno **a**, queremos saber o valor de **x** e de **y**.

$$\rightarrow \cos(a) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{\cos(b)} \rightarrow y = \cos(a) \cdot \cos(b)$$

$$\rightarrow \sin(a) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{\cos(b)} \rightarrow x = \sin(a) \cdot \cos(b)$$

II

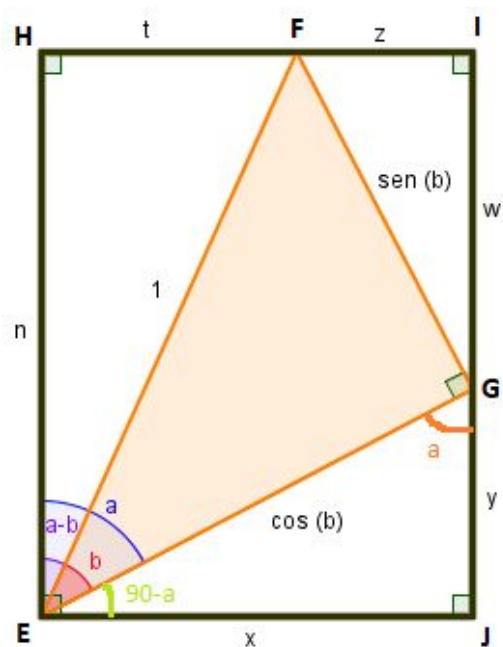


Figura 7

Agora olhando para o triângulo **FIG**, como podemos ver na Figura 8, e usando as relações Trigonométricas para Seno e Cosseno:

$$\rightarrow \cos(a) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{z}{\text{sen}(b)} \rightarrow \mathbf{z = \cos(a) \cdot \text{sen}(b)}$$

$$\rightarrow \text{sen}(a) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{w}{\text{sen}(b)} \rightarrow \mathbf{w = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}$$

II

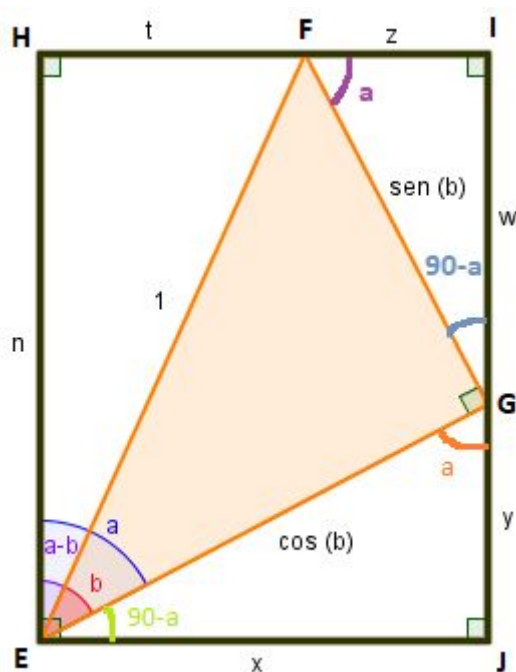


Figura 8

Portanto, analogamente, vemos que $n=y+w \Rightarrow n=\cos(a-b)$. Então,
 $\cos(a-b)= \cos(a).\cos(b) + \sen(a).\sen(b)$

Seguindo esse mesmo raciocínio, teremos que:

$$t=x-z \Rightarrow t=\sen(a-b) \Rightarrow \mathbf{\sen(a-b)= \sen(a).\cos(b) - \sen(b).\cos(a).}$$

cqd

Fonte: http://bit.profmatt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1344/2012_01140_HUMBERTO_GULLO_DE_BARROS.pdf?sequence=1