

Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica S01E03 - Game of Points

Geometria Analítica: Coordenadas Cartesianas, Distância entre Pontos, Estudo da Reta

- Introdução ao *Peer Instruction* - Entregar usuários e senhas aos participantes
- Três problemas introdutórios

O ponto $(0,2)$ pertence a qual quadrante?

Question is open for voting

Created by: Paola Masera

- Pertence ao 1° quadrante
- Pertence ao 2° quadrante
- Pertence ao 3° quadrante
- Pertence ao 4° quadrante
- Não pertence aos quadrantes

O Eixo das Abscissas é crescente para ambos os lados?

Question is closed for voting

Created by: Paola Masera

- Sim, pois é infinito tanto para a esquerda quanto para a direita.
- Sim, pois os números continuam crescendo.
- Não, pois os números crescem para a direita e diminuem para a esquerda.
- Não, pois algumas funções decrescem para a esquerda.
- Sim, pois todas as funções crescem para ambos os lados.

Dado qualquer ponto no plano que seja o centro de uma circunferência de raio 5, quantas são as coordenadas inteiras que fazem parte da circunferência?

Question is open for voting

Created by: Paola Masera

- 15
- 12
- 9
- 4
- 8

- Introdução do Conteúdo

Hoje será trabalhado o conceito de Plano, bem como os elementos que o compõe. Também será discutido o conceito de distância.

- O que será abordado?

O que é um Ponto?

O que é um Plano?

O que é e o que significa uma Coordenada do Plano?

O que é uma Reta?

O que é um Espaço?

É possível calcular a distância entre pontos? Como?

E entre retas?

- Desenvolvimento do Conteúdo

A Geometria de Euclides e a Geometria Analítica

A Geometria Analítica decorre da Geometria Euclidiana Plana, descrita por Euclides pelo método hipotético-dedutivo (axiomático) em seu livro *Os Elementos*. A palavra **Geometria** deriva do grego *geometrein* (*geo*, “terra”, *metrein*, “medida”), pois inicialmente era a ciência que estudava as medidas da terra. A Geometria Analítica estabelece conexões entre geometria e álgebra de modo que os conceitos da geometria são analisados por meio de processos algébricos.

- O que é um Ponto?

Um ponto é uma noção primitiva, que determina uma posição, a partir de suas coordenadas, no espaço. Ele não possui dimensão, seja ela volume, medida, comprimento ou área. Segundo Euclides, em “*Os Elementos*”, “ponto é o que não tem parte”. Ele é utilizado para construção de quaisquer outros conceitos geométricos e é localizado a partir de uma coordenada. Caso o ponto não seja encontrado nos Eixos, ele será localizado em um dos quadrantes.

- O que é um Plano?

Definição: Um plano possui como objetivo, a localização de pontos em um objeto (denominado plano) infinito, de duas dimensões. O plano mais comum, que todos conhecemos é o Plano Cartesiano.

O Plano Cartesiano é definido por duas retas (chamadas de eixos), que se cruzam perpendicularmente. A reta vertical é chamada de Eixo das Coordenadas (y), e a reta horizontal é chamada de Eixo das Abcissas (x). Cada Eixo é numerado compreendendo o sequenciamento dos números reais e tem início na intersecção dos Eixos, chamado de Origem das Coordenadas.

Um plano pode estar em qualquer posição; horizontal, vertical ou na diagonal, mas ele sempre é direcionado conforme as setas dos Eixos. Os eixos dividem um espaço em 4 partes, chamadas de quadrantes. Os quadrantes possuem uma ordem, a qual tem início onde ambos eixos são positivos, e “gira” em sentido anti-horário.

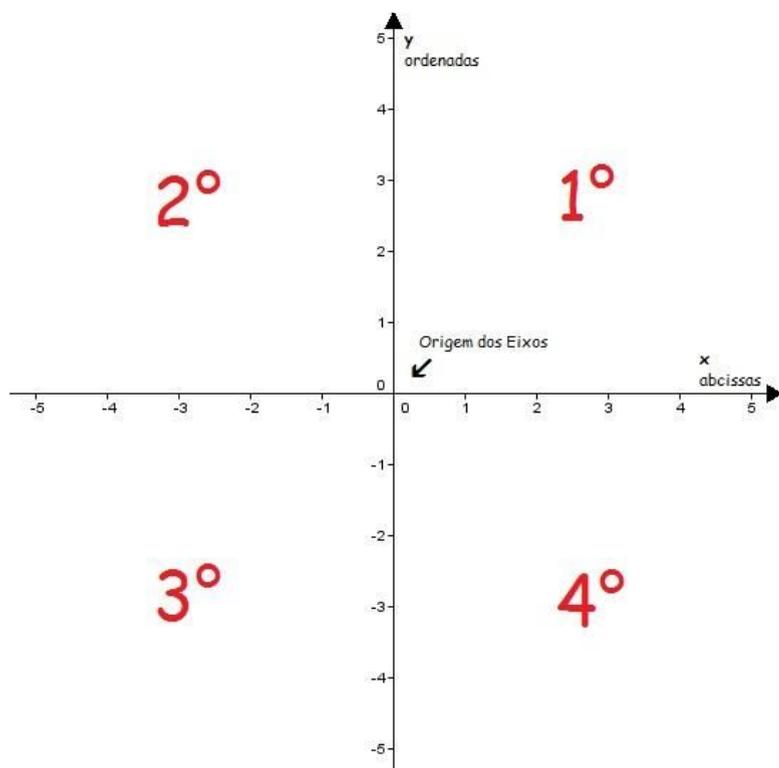


Figura 1

Observando a Figura 1, podemos concluir que:

- 1º quadrante: $x > 0$ e $y > 0$
- 2º quadrante: $x < 0$ e $y > 0$
- 3º quadrante: $x < 0$ e $y < 0$
- 4º quadrante: $x > 0$ e $y < 0$

No Plano, temos alguns postulados:

1. Da existência: Em um plano, bem como fora dele, há inúmeros pontos.
2. Da determinação: Três pontos não colineares determinam um único plano. – Uma reta e um ponto fora dela, ou duas Retas concorrentes também determinam um plano.

Plano tridimensional. (x, y, z)

O plano 3D tem as mesmas propriedades do plano cartesiano 2D. É nele que trabalharemos a Geometria Espacial, Cônicas e algumas funções específicas.

Nele é adicionado outro eixo, chamado eixo z. Ele é perpendicular à ambos eixos x e y e possui origem no mesmo ponto dos outros dois eixos.

- O que é uma Coordenada?

Definição: Uma coordenada é a notação da localização de um ponto no plano. Ela é representada por um par ordenado $(x;y)$ no Plano Cartesiano 2D, e por uma terna ordenada $(x;y;z)$ no Plano Cartesiano 3d, ou seja, uma representação da localização de um ponto, onde é lido primeiro a posição x , depois a posição y e no caso tridimensional, por último a posição z . Para mais fácil compreensão de como encontrar um ponto que esteja nas três dimensões, basta criar uma “caixinha”.

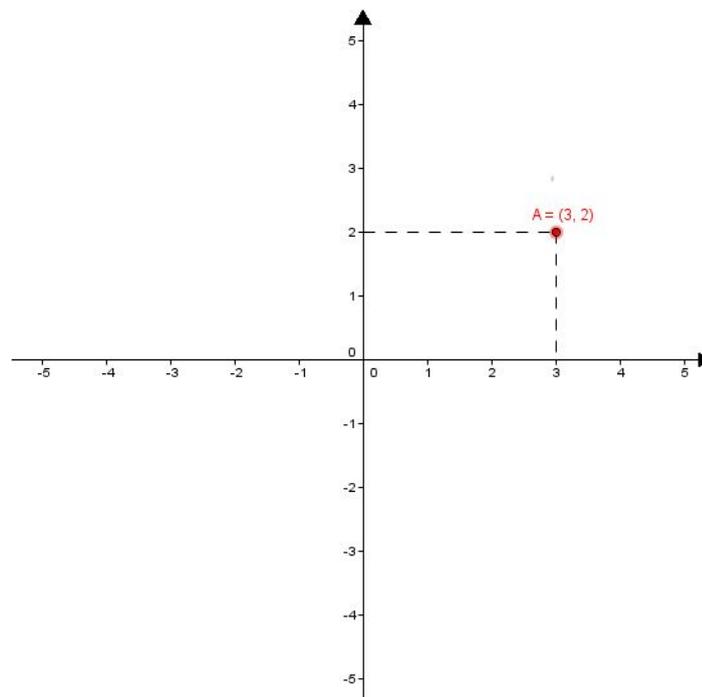


Figura 2

Coordenadas Polares:

Definição: um sistema de coordenadas **polares** é um sistema de **coordenadas** bidimensional, no qual cada ponto de um plano é determinado pela sua distância em relação a um ponto fixo e do ângulo em relação a uma direção fixa.

As coordenadas retangulares também podem ser interpretadas como se fossem pontos de uma circunferência, e a partir disso traçamos um raio e um ângulo em relação ao eixo das abcissas.

- O que é uma Reta?

Definição: Uma reta é o conjunto de infinitos pontos.

Euclides definiu alguns postulados em torno da reta:

1. Da existência: Em uma reta e fora dela, há inúmeros pontos.

2. Da determinação: Dados dois pontos distintos, existe apenas uma reta que os contém. – Dois pontos podem ser coincidentes, e, portanto, não determinam uma reta.
3. Da inclusão: Se uma reta possui dois ou mais pontos de um plano, então ela está contida no plano. – Uma reta contida em um plano, divide-o em dois semi-planos.

Além da reta, existem os seguintes objetos geométricos:

1. Semirreta: É um conjunto de pontos, que tem origem em um ponto, e é infinita para um dos lados.
2. Segmento de Reta: Segmento vem do Latim “*segmentum*” que significa corte. Ou seja, Segmento de Reta seria um corte, um pedaço da reta, que possui início e fim. Euclides, em *Os Elementos*, define Segmento de Reta como “a menor distância inimaginável entre dois pontos distintos”.

Assim como o Plano, a Reta também pode estar em qualquer posição; horizontal, vertical ou diagonal.

Duas retas, ao estarem contidas em um mesmo plano, são chamadas de retas coplanares. As relações entre duas retas coplanares podem ser definidas da seguinte forma:

1. Retas Concorrentes: Retas que contém apenas um ponto em comum. – *Caso especial*: Se o ângulo formado entre elas for 90° , são chamadas de Retas Perpendiculares.
2. Retas Paralelas: Retas que nunca se tocam. – *Caso específico*: Duas retas paralelas podem ser coincidentes (estar uma sobre a outra).
3. Retas Reversas: Retas que nunca se tocam, porém não estão na mesma direção e sentido. - *Caso específico*: Duas retas reversas podem ser ortogonais (possuir o ângulo de 90° entre elas, mas nunca se tocam).

- O que é o Espaço?

Definição: Espaço é o conjunto de todos os pontos, também pode ser definido como um conjunto de planos. É nele que estudamos a Geometria Espacial.

- Distâncias entre pontos:

A distância entre pontos é calculada a partir da sua posição no Plano. Utilizando as coordenadas dos pontos em questão, isso se torna de fácil entendimento:

Projetamos um ponto no plano com coordenadas $P(a,b)$, e outro ponto diferente de P , $P'(c,d)$. Temos dois casos que podem ocorrer entre esses dois pontos:

- 1) São colineares: caso sejam colineares então a sua distância é mostrada explicitamente no eixo das abcissas.
- 2) São não-colineares: então a sua distância é sempre a hipotenusa de um triângulo retângulo.

A partir desse conhecimento, é fácil notar que o mesmo princípio pode ser obtido entre a distância de Ponto-Reta, Reta-Reta e Reta-Plano.

Ponto – Reta: Basta utilizarmos algum ponto da reta em questão, e aplicar a fórmula. Caso o Ponto inicial esteja na Reta, então a distância entre eles é zero.

Reta – Reta: Basta utilizarmos um ponto de cada reta. Caso as retas sejam Concorrentes, a distância entre elas no ponto de Intersecção é zero.

Reta – Plano: Basta utilizarmos um ponto da Reta, e um do Plano. Caso a Reta esteja contida no Plano, a distância entre eles é zero. Caso a Reta seja concorrente ao Plano, no ponto de intersecção, a distância é zero.

→ Resolução e Explicação dos Problemas Introdutórios

1. A resposta correta é a letra E. Pois se um ponto não está em nenhum dos quadrantes, então ele pertence ao Eixo, e não aos quadrantes.
2. A resposta correta é a letra C. Mesmo que os Eixos sejam infinitos para ambos os lados, a numeração está diminuindo para a esquerda.
3. A resposta correta é a letra B. Além dos 4 pontos da “cruz” com 5 unidades de distância para norte, sul, leste e oeste, também temos mais 8 pontos na circunferência que distam 5 do centro de acordo com a relação pitagórica de catetos 3 e 4.

- Apresentação de 5 exercícios para resolução utilizando o método *Peer Instruction*. As questões serão resolvidas e discutidas em aula.

1.

A qual a função os pontos A (-1;-1), B (-0,5;-2), C (1;1), D (5;0,2) pertencem?

Question is open for voting

Created by: Paola Masera

- a. Função Quadrática
- b. Função Afim
- c. Função Seno
- d. Função Hiperbólica
- e. Função Cosseno

2.

Qual o perímetro e a área do triângulo formado pelo pontos A (9;-5), B (-8;-8) e C (11;1)?

Question is open for voting

Created by: Paola Masera

- a. P = 47,32 e A = 52
- b. P = 44,61 e A = 56
- c. P = 44,61 e A = 48
- d. P = 47,32 e A = 49
- e. P = 44,32 e A = 48

3.

Segundo o IBGE, o Brasil possui 16.886km de fronteiras terrestres. Como essa distância é calculada?

Question is open for voting

Created by: Paola Masera

- a. Um técnico, a pé, usa uma trena para medir.
- b. Por projeção a partir de um mapa cartográfico.
- c. Utilizando o software Geomedia.
- d. Utilizando o software Geogebra.
- e. Por fotografias de satélites.

4.

Um triângulo isósceles é formado pelos pontos A (2;4), B (7;3) e C (x;0). Qual o valor de x?

Question is open for voting

Created by: Paola Masera

- a. 3,3
- b. 4,8
- c. 4
- d. 4,3
- e. 3,8

5.

Considere três pontos não colineares, A (6;7), B (13;14) e C (13;6). Quantos e quais pontos são equidistantes deles?

Question is open for voting

Created by: Paola Masera

- a. São 2, (0;0) e (10;10)
- b. São 2, (7;14) e (10;10)
- c. É apenas 1, (0;0)
- d. É apenas 1, (10;10)
- e. Três pontos não colineares não podem ter um ponto equidistante.

Não perca o próximo episódio! Segunda-feira, 12/06, Sala A115. Esperamos vocês!