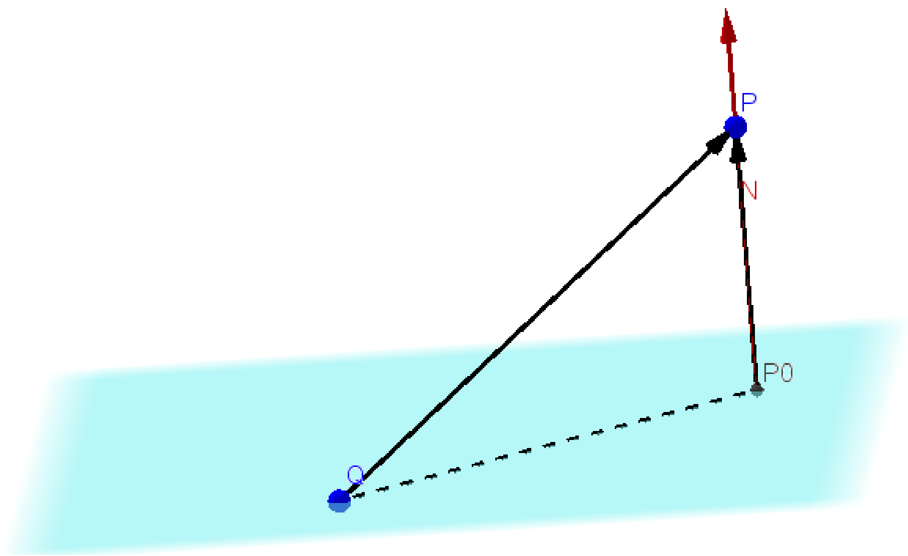
Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica
Aula S01E06 – Distância no plano e no espaço

- **Conteúdo da Aula:**

Definição de distância:
Escolhendo o ponto Q qualquer pertencente ao plano α, conseguimos traçar um triângulo retângulo com os lados: vetor P0P sendo um cateto, P_0Q sendo o outro cateto, e de Q até P sendo a hipotenusa. Isto é uma simples consequência do Teorema de Pitágoras, que implica que o cateto de um triângulo retângulo tem sempre comprimento menor que o comprimento de sua hipotenusa. Como na figura abaixo:

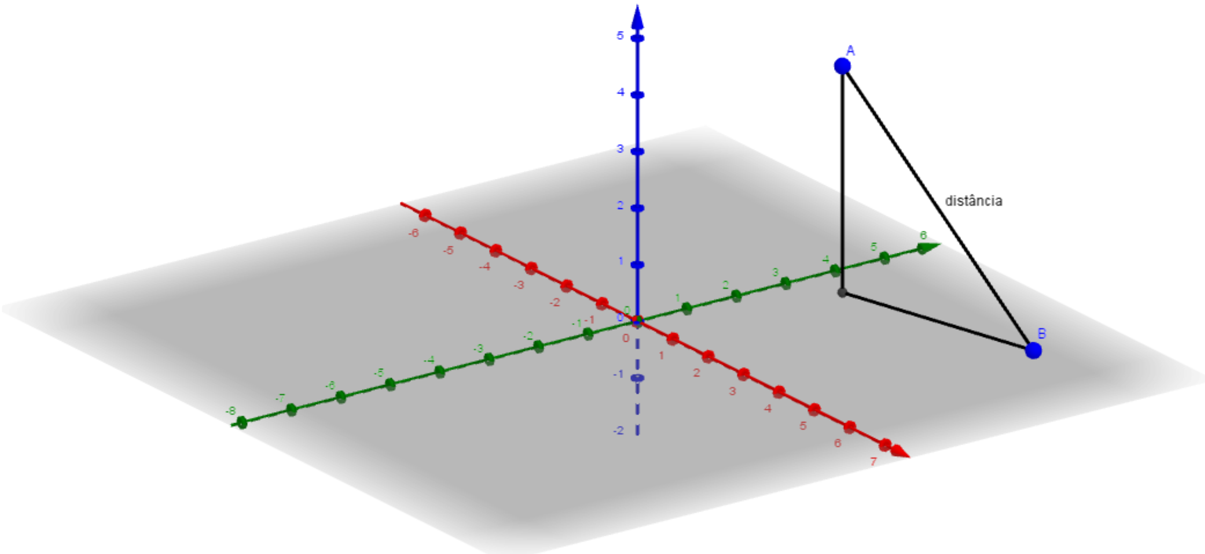


Fonte: Autores.

Logo, a distância entre objetos geométricos é a menor medida entre esses dois objetos.

1) **Distância entre pontos no espaço**

Trabalharemos a noção intuitiva de distância entre dois pontos no espaço, assim como foi feito para o plano cartesiano.
Arquivo “DIST PT PT”



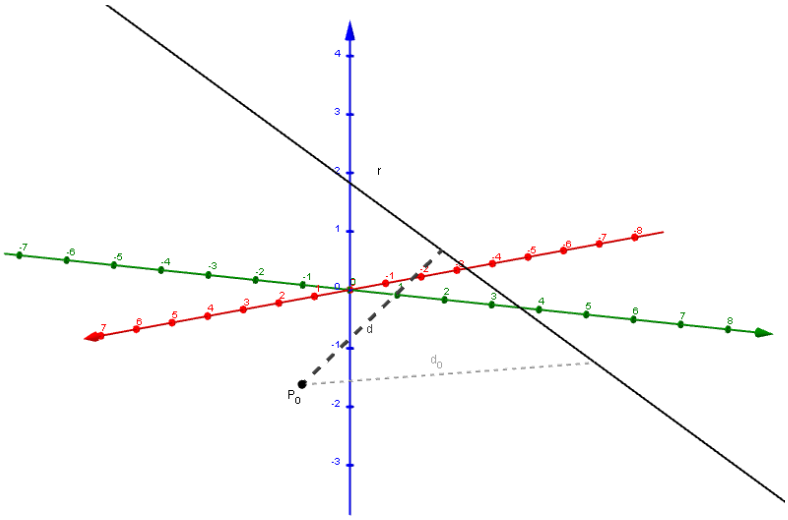
Fonte: Autores.

(Questão 1 no Peer)

Com essa análise chegaremos à equação:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

2) Distância entre ponto e reta:



Fonte: Autores.

A distância que é calculada é a de um segmento passando pelo ponto P e perpendicular à reta r. Portanto, temos o seguinte:

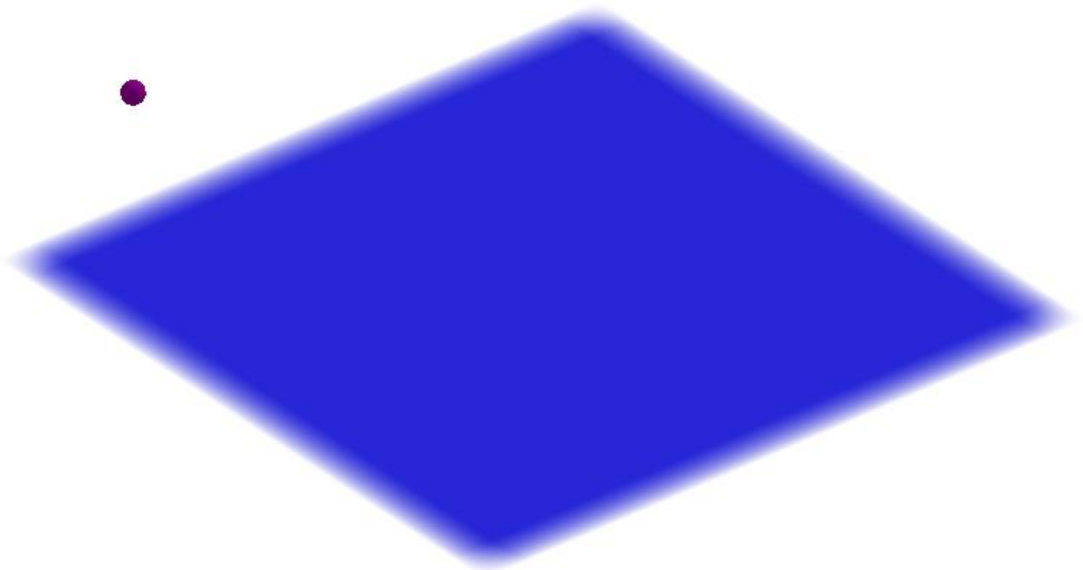
Seja r uma reta formada por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ e seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer no espaço, os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_0}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância d entre o ponto P_0 e a reta r, que é o que pretendemos calcular.

Sabemos que a área do paralelogramo é dada pelo produto da altura do paralelogramo pela base, ou seja, $A = base \times altura = |\vec{v}|d$, mas também temos, de acordo com a interpretação geométrica do módulo do produto vetorial, por $A = |\vec{v} \times \vec{u}|$. Comparando as duas representações da área, percebemos que:

$$|\vec{v}|d = |\vec{v} \times \vec{u}|$$
$$\downarrow$$
$$\boldsymbol{d = d_{(P_0,r)}} = \frac{|\vec{v} \times \vec{u}|}{|\vec{v}|}$$

(Questão 2 do Peer)

3) Distância entre ponto e plano:



Fonte: Autores.

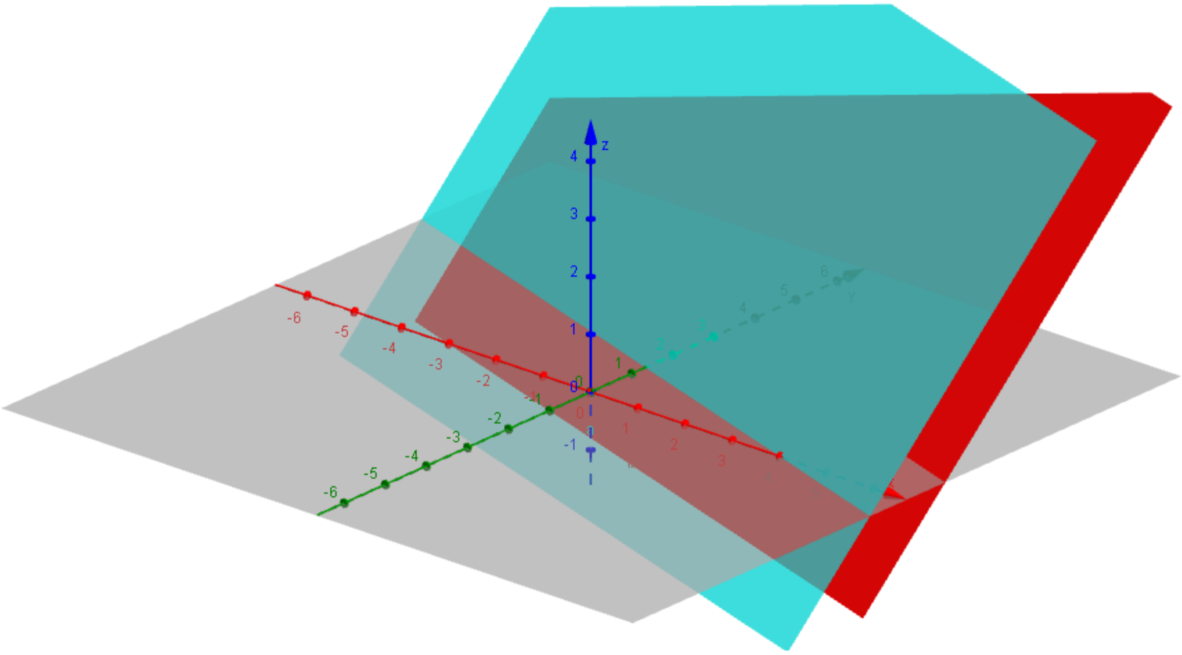
(Questão 3 no Peer)

A distância que é calculada é a de um segmento passando pelo ponto P e perpendicular ao plano α. Logo, esse segmento será de P até P_o, sendo P_o o ponto de intersecção desse segmento no plano α. Esse segmento, por ser perpendicular ao plano α logo será paralelo ao vetor Normal (N).

Logo o vetor $\overrightarrow{PP_0}$ por estar na direção de N, o vetor que será a distância será a projeção ortogonal de $\overrightarrow{PP_0}$ sobre N, ou seja, $proj_N \overrightarrow{PP_0}$. Portanto, temos que:

$$D(P,\alpha) = \left\| proj_N \overrightarrow{PP_0} \right\| = \frac{|PP_o \cdot N|}{\|N\|}$$

4) Distância entre planos

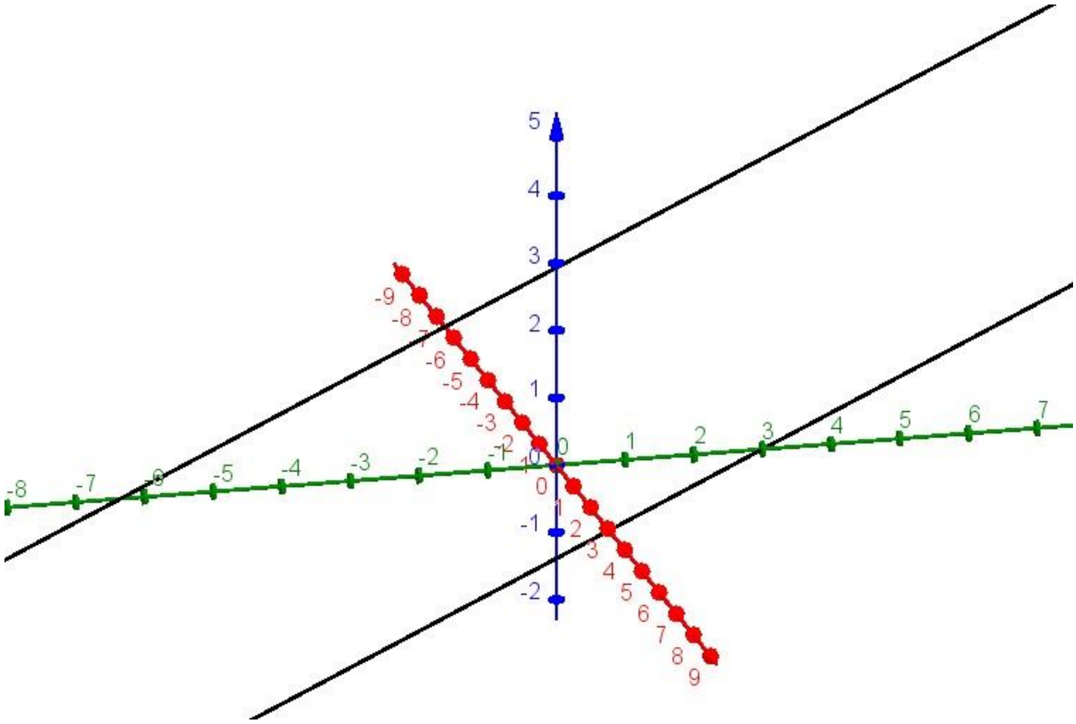


Fonte: Autores.

(Questão 4 no Peer)

Temos que a distância entre dois planos é definida apenas quando os planos são paralelos, pois se forem concorrentes, a intersecção desses dois planos formam uma reta, logo, a distância também é nula. Então, dados dois planos α e β, a distância d entre eles nada mais é que a distância entre um ponto qualquer de um dos planos até o outro, recaindo, no exemplo anterior.

5) Distância entre retas:



Fonte: Autores.

(Questão 5 no Peer)

Sejam r e s duas retas quaisquer. A distância entre essas retas é dada pela menor distância entre todos os pares possíveis de pontos que formam essas retas. Matematicamente podemos descrever essa distância, dados P e P' pontos das retas respectivas r e s, como:

$$\text{dist}(r,s) = \min \{\text{dist}(P,P') : P \in r \text{ e } P' \in s\}$$

Podemos perceber que se dist(r,s) = 0, então as retas são concorrentes em algum ponto, ou são coincidentes se isso vale para todos os pontos das retas.

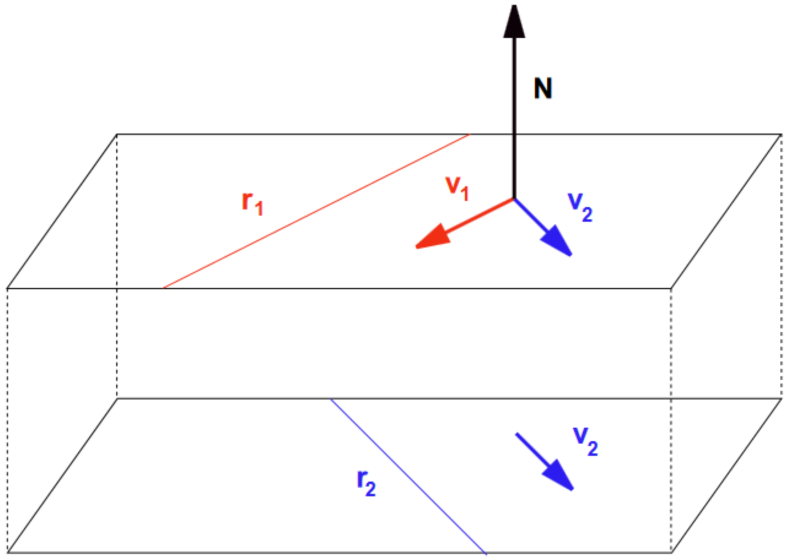
➔ Distância entre retas paralelas:

Se duas retas r e s são paralelas, então a distância entre elas é obtida a partir da distância de qualquer ponto de r até a reta s. A recíproca também vale, pois as retas r e s são paralelas.

➔ Distância entre retas reversas:

Se r_1 e r_2 são retas reversas, podemos sempre encontrar planos paralelos π_1 e π_2 que os contém, e a distância entre esses planos será a distância entre as retas r_1 e r_2. Para encontrar π_1 fazermos uma translação de r_2 até que ela intersecte r_1. Como r_1 e r_2 têm direções diferentes (por serem reversas), então essa translação de

r_2 e a reta r_1 serão concorrentes, logo formam um plano π_1. Fazemos o mesmo raciocínio para encontrar o plano π_2. Como estes planos são paralelos a ambas as retas, então eles são paralelos entre si. Portanto a distâncias entre as retas reversas r_1 e r_2 é a distância entre os planos π_1 e π_2. Logo, se $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$, e v_1 e v_2 são vetores diretores das retas r_1 e r_2 e o vetor $N = v_1 \times v_2$ é normal à ambos planos temos:



Fonte: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/retas_e_planos.pdf

Portanto a equação que resulta na menor distância entre essas retas é a mesma que representa a distância de um plano paralelos à outro plano:

$$\text{dist}\ (r_1, r_2) = \text{dist}\ (\pi_1, \pi_2) = \frac{|P1P2\ .N|}{||N||}$$

6) Distância entre reta e plano

Fonte: Autores.

(Questão 6 no Peer)

Como reta e plano são objetos infinitos, para calcular a distância entre uma reta e um plano no espaço temos só dois casos.

Caso 1) Se a reta não é paralela ao plano, então eles vão se interseccionar em algum ponto. Logo, a distância é zero.

Caso 2) Se a reta é paralela ao plano, então o cálculo da distância será pelo método que usamos para saber a distância entre o ponto e o plano. Escolhendo um ponto qualquer que pertence a reta, e traçar um vetor deste ponto até o plano.