

Ateliê de Matemática: Trigonometria e Geometria Analítica

S01E07 - As Cônicas de Nárnia

Cônicas - Elipse, Parábola e Hipérbole

- Introdução do Conteúdo

No episódio de hoje, trabalharemos com os conceitos das Cônicas - Elipse, Parábola e Hipérbole..

- O que será abordado?

Veremos os seguintes assuntos:

Seções Cônicas

Elipse - Definição, Construção e Equação Canônica

Parábola - Definição, Construção e Equação Canônica

Hipérbole - Definição, Construção e Equação Canônica

- Desenvolvimento do Conteúdo

Seções Cônicas:

Uma *Seção Cônica*, ou simplesmente, uma *Cônica* é uma curva obtida cortando-se qualquer cone de duas folhas por um plano que não passa pelo vértice, ou seja, um *plano secante*.

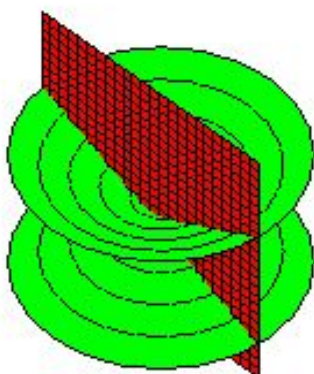


Figura 1 - mat.ufrgs.br/-calcula

A cada vez em que o Plano intercepta o Cone forma-se uma Seção

Cônica diferente.

Exercício 1:

Questão 1:

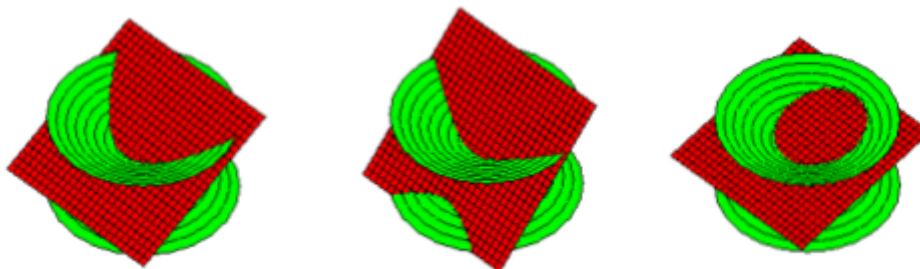


Figura 2 - mat.ufrgs.br/-calculo

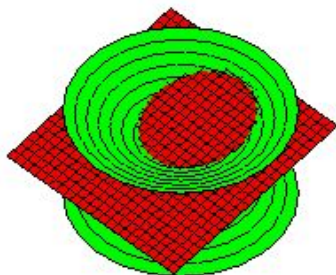
Identifique, respectivamente, as Cônicas acima:

- a) Hipérbole, Parábola, Círculo
- b) Hipérbole, Parábola, Elipse
- c) Parábola, Hipérbole, Círculo
- d) Parábola, Hipérbole, Elipse

Exercício 2:

Questão 2:

Qual das alternativas representa algo que é construído a partir da Cônica abaixo?



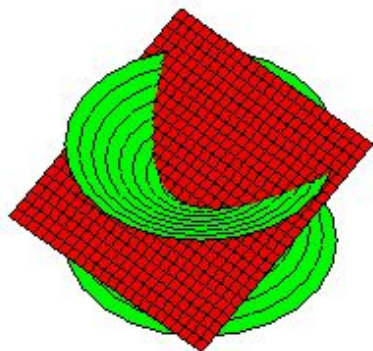
Fonte - mat.ufrgs.br/-calculo

- a) Faróis.
- b) Antena parabólica.
- c) Movimentos dos planetas.
- d) Lanterna.

Discussão: Por qual motivo esses objetos são construídos dessa forma?

Questão 3:

Quais objetos são construídos a partir da Cônica abaixo?



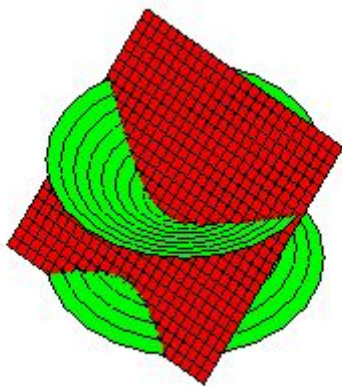
Fonte - mat.ufrgs.br/-calculo

- a) Faróis de automóveis.
- b) Antena digital.
- c) Espelhos.
- d) Mesa de sinuca mágica.

Discussão: Por qual motivo esses objetos são construídos dessa forma?

Questão 4:

Qual objeto é construído a partir da Cônica abaixo?



Fonte - mat.ufrgs.br/-calculo

- a) Microscópio.
- b) Telescópio de reflexão.
- c) Giroscópio.
- d) Caleidoscópio.

Discussão: Por qual motivo esses objetos são construídos dessa forma?

1. Se o Plano não é paralelo a uma geratriz, e corta só uma das folhas do cone, então a cônica formada é uma *Elipse*.

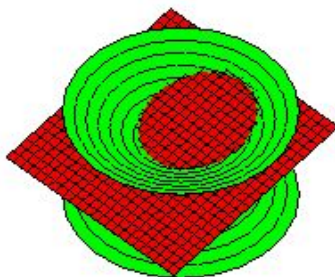


Figura 4 - mat.ufrgs.br/-calcula

2. Se o Plano é paralelo à geratriz (reta que *gera* o cone), a cônica formada é a *Parábola*.

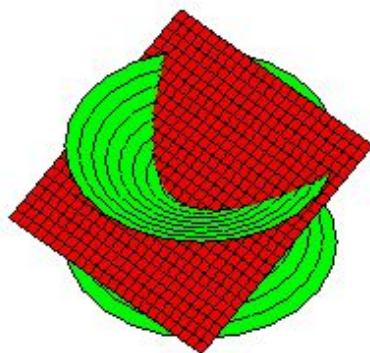


Figura 3 - mat.ufrgs.br/-calcula

3. Se o Plano não é paralelo a uma geratriz, e corta ambas as folhas do cone, forma-se uma *Hipérbole*.

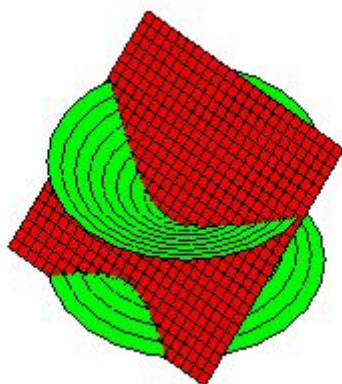
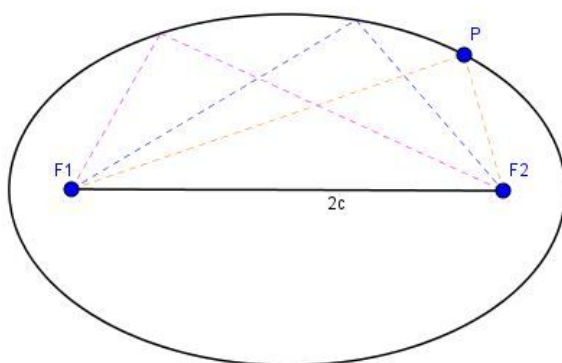


Figura 4 - mat.ufgs.br/-calculo

4. Há outros três casos: Se o Plano está em posição vertical no cone, pode ser visualizado os seguintes objetos: um par de retas concorrentes, uma reta ou um ponto. Essas são as chamadas *Retas Degeneradas*, que não entraremos no mérito de estudo.

Elipse: É o conjunto de pontos, cuja soma das distâncias a dois pontos F_1 e F_2 (focos), é uma constante: $|dist(P, F_1) + dist(P, F_2)| = 2a$. A palavra “elipse” deve-se a “falta” para se chegar à igualdade (pois $c < a$)

Lugar Geométrico:



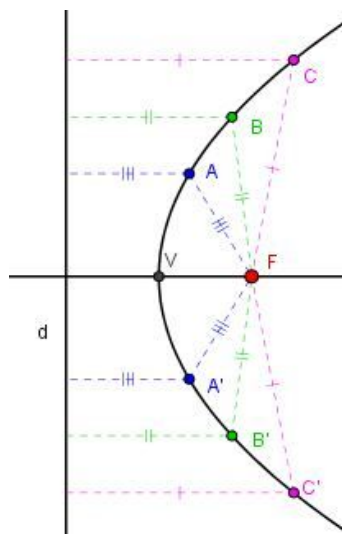
F_1 e F_2 são os focos da Elipse, e P um ponto qualquer dela. Sendo $2c = dist(F_1, F_2)$, temos que a condição de que $a > c$. Caso $a = c$ ou $c = 0$, temos o caso especial da elipse, a circunferência.

Equação Canônica:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parábola: Considere em um plano, um ponto F e uma reta d que não contém F . Denominamos *parábola* de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano, que equidistam de d e F . A palavra “parábola” deve à

igualdade das referidas distâncias.

Lugar Geométrico:



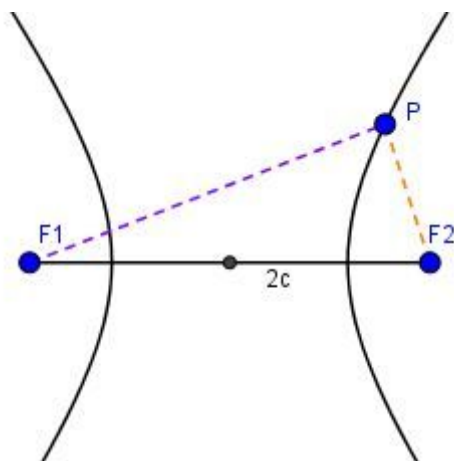
É o conjunto de pontos equidistantes de um Ponto F (foco da parábola) e de uma reta d (diretriz), que não contém F.

A reta perpendicular à d e que passa por F, intercepta a parábola no ponto V, vértice da parábola.

Equação Canônica: $y^2 = 4px$

Hipérbole: É o conjunto de pontos, cuja soma das distâncias a dois pontos F1 e F2 (focos), é uma constante: $|dist(P, F1) - dist(P, F2)| = 2a$. A palavra “hipérbole” deve-se ao “excesso” para se chegar à igualdade (pois $a < c$)

Lugar Geométrico:



É o conjunto de pontos, cuja distâncias a dois pontos F1 e F2 (focos) é uma constante: $|dist(P, F1) - dist(P, F2)| = 2a$. F1 e F2 são os focos da Hipérbole, e P um ponto qualquer dela.

Sendo $2c = dist(F1, F2)$, temos a condição de que $a < c$.

Equação Canônica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Exercícios:

- 1) Dadas as seguintes equações, escolha a alternativa que identifique a cônica.

1. $x^2 + 2y^2 - 15 = 0$

- a) Parábola
- b) Elipse
- c) Hipérbole
- d) N.D.A.

2. $x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

- a) Parábola
- b) Elipse
- c) Hipérbole
- d) N.D.A.

3. $x^2 + 2x - y = 5$

- a) Parábola
- b) Elipse
- c) Hipérbole
- d) N.D.A.

4. $x^2 - 4y^2 = 0$

- a) Parábola
- b) Elipse
- c) Hipérbole
- d) N.D.A.

2) Dada uma equação, identifique a cônica que é representada por ela e escreva a respectiva forma canônica.

1. $x^2 + 4x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$

2. $5y^2 - 6x - 3x^2 - 10y - 13 = 0$

3. $y^2 - 8y + 9x + 16 = 0$

Não perca o próximo episódio! Segunda-feira, 10/07, Sala A115. Esperamos vocês!